

EDISI REVISI 2018

Buku Guru

Matematika

SMA/MA/
SMK/MAK

KELAS
XII

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku guru yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku guru ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis dan laman http://buku.kemdikbud.go.id atau melalui email buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matemitaka : buku guru/ Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- . Edisi Revisi
Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018.
viii, 232 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII
ISBN 978-602-427-118-3 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-427-121-3 (jilid 3)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Penulis	:	Abdur Rahman As'ari, Tjang Daniel Chandra, Ipung Yuwono, Lathiful Anwar, Syaiful Hamzah Nasution, Dahliatul Hasanah, Makbul Muksar, Vita Kusuma Sari, Nur Atikah.
Penelaah	:	Agung Lukito, Turmudi, Yansen Marpaung, Suwarsono, Sugito Adi Warsito, Ali Mahmudi.
Pe-*review*	:	Kartoyoso
Penyelia Penerbitan	:	Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Cetakan Ke-1, 2014 (ISBN 978-602-282-029-1)
Cetakan Ke-2, 2018 (edisi revisi)
Disusun dengan huruf Times New Roman, 12 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian di atas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antarvariabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antarbeberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas XII untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada siswa seperti uraian di atas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan siswa dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, serta berlatih berpikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan yaitu dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan siswa untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, siswa diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap siswa dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka terhadap masukan dan akan terus diperbaiki dan disempurnakan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca untuk memberikan kritik, saran dan masukan guna perbaikan dan penyempurnaan edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Tim Penulis

Daftar Isi


KURIKULUM 2013

BAB 1

DIMENSI TIGA

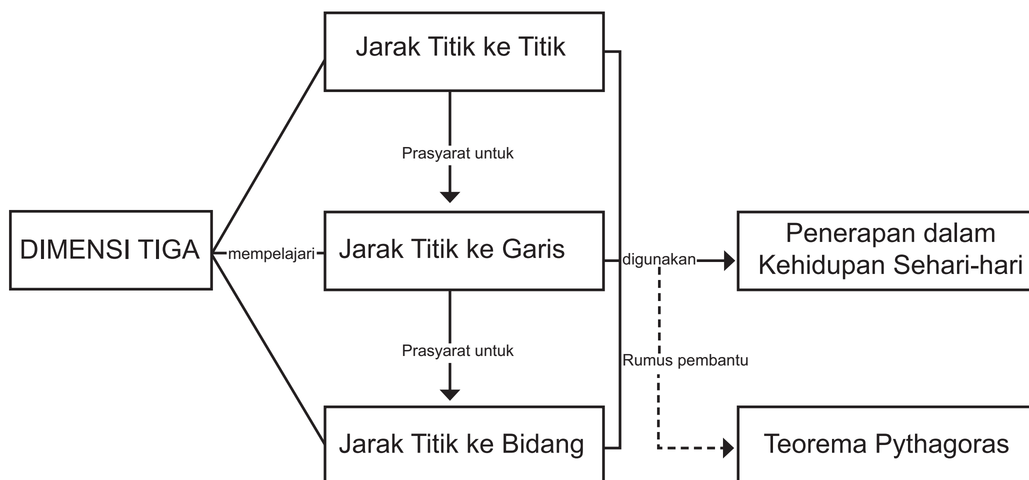
A. Kompetensi Inti (KI) dan Kompetensi Dasar (KD)

Kompetensi Inti	Kompetensi Dasar
1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2. Menunjukkan perilaku jujur, disiplin, tanggung-jawab, peduli (gotong royong, kerjasama, toleran, damai), santun, responsif dan proaktif sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta alam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia. 3. Memahami, menerapkan, menganalisis dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konsep-tual, prosedural berdasarkan rasa ingintahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah. 4. Mengolah, menalar, menyaji, dan mencipta dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, serta bertindak secara efektif dan kreatif dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.	3.1 Mendeskripsikan jarak dalam ruang (Antartitik, titik ke garis, dan titik ke bidang). 4.1 Menentukan jarak dalam ruang (antartitik, titik ke garis, dan titik ke bidang).

B. Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran dari pembelajaran tentang dimensi tiga adalah siswa mampu mendeskripsikan dan menentukan jarak dalam ruang yang meliputi jarak antartitik, jarak titik ke garis, dan titik ke bidang. Pengalaman belajar yang diharapkan dalam pembelajaran adalah: (1) mengamati dan mendeskripsikan masalah jarak antartitik, jarak titik ke garis, dan titik ke bidang pada ruang, (2) mengamati dan menerapkan konsep jarak antartitik, titik ke garis, dan titik ke bidang untuk menyelesaikan masalah pada dimensi tiga, dan (3) Mengonstruksi rumus jarak dua titik dan jarak titik ke garis.

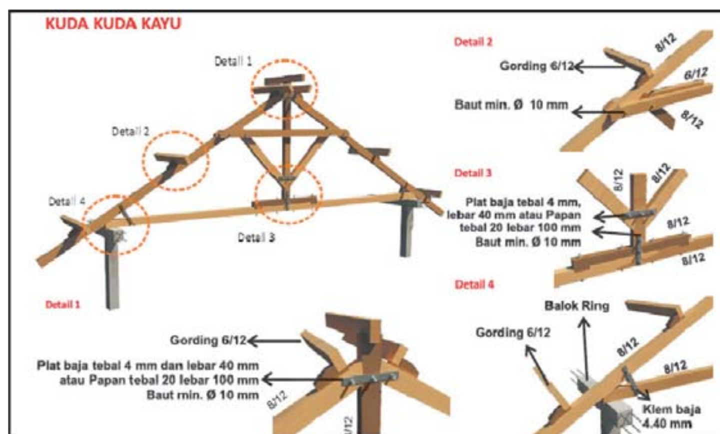
C. Diagram Alur Konsep



D. Proses Pembelajaran

Kegiatan Pendahuluan

- Untuk memotivasi siswa, Guru dapat meminta siswa untuk membaca biografi Euclid yang disajikan di buku siswa.
- Awal pembelajaran, siswa diberi pengantar tentang masalah dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep jarak pada dimensi tiga. Masalah yang diajukan tentang biaya yang harus dikeluarkan untuk membuat atap rumah, yaitu kuda kuda kayu. Detail kuda kuda kayu disajikan dalam gambar berikut.



Selain masalah kuda kuda di atas, dapat diberikan contoh lain seperti kamar tidur yang berbentuk balok, kotak makanan yang berbentuk kubus, kaleng susu yang berbentuk tabung dan lain lain.

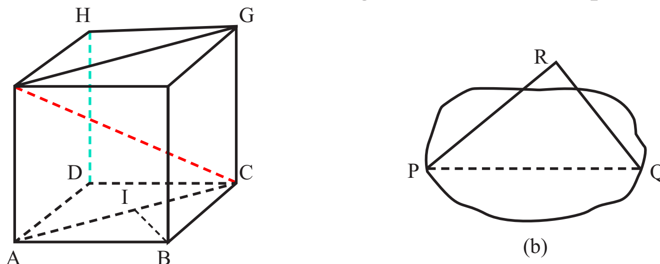
Kegiatan Inti

Subbab 1.1. Jarak Antartitik

Mengamati

Pada bagian Ayo Mengamati, siswa diminta untuk mengamati beberapa masalah kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan jarak pada dimensi tiga. Pertama, siswa diberi kubus ABCD.EFGH dan bidang yang memuat titik P, Q, dan R. Dari kubus tersebut dijelaskan jarak antartitik. Pada Masalah 1, siswa diberi masalah tentang menentukan lintasan terpendek dari suatu kota ke kota lain. Pada Masalah 2, siswa diberi masalah tentang konsep jarak dari dua bangun.

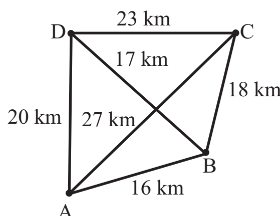
- Guru meminta siswa untuk mengamati Gambar 1.4 pada Buku Siswa.



Bangun 1.1.

- **Masalah 1.1**

  Masalah 1 memuat masalah menentukan lintasan terpendek dari dua kota. Minta siswa untuk mengamati Bangun 2.2 di buku siswa. Bangun 2.2 merupakan representasi dari kota yang dihubungkan dengan jalan. Pada Bangun 2.2 titik merepresentasikan kota dan segmen garis merepresentasikan jalan yang menghubungkan kota.



Gambar 1.2 Gambar Kota dan jalan yang menghubungkannya

Tugasi siswa untuk menentukan rute yang dapat ditempuh Nasyitha dari A ke C dan menghitung panjang lintasannya. Kemudian instruksikan ke siswa untuk menulisnya pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1: Kemungkinan Rute dari yang ditempuh Nasyitha

No.	Kemungkinan Rute dari Kota A ke Kota C	Panjang Lintasan
1.	A → D → C	20 + 23 = 4 3
2.	A → D → B → C	20 + 17 + 18 = 55
3.	A → C	27
4.	A → B → C	16 + 18 = 34
5.	A → B → D → C	16 + 17 + 23 = 56

Setelah siswa melengkapi Tabel 1.1, beri kesempatan siswa untuk menentukan jarak antara kota A dan C.

Jarak antara kota A dan C adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan antara kota A dan C

- **Masalah 1.2**

  Masalah 2 berisi uraian tentang pengertian jarak antara bangun G1 dan G2. Setelah siswa mengamati Masalah 1.1 dan Masalah 1.2, beri kesempatan kepada siswa untuk menuliskan istilah penting dari pengamatan pada tempat yang telah disediakan.

Menanya

- Minta siswa untuk menulis pertanyaan dari masalah-masalah yang disajikan dalam kegiatan Ayo, Mengamati. Beri kesempatan kepada siswa untuk menulis dugaan yang mungkin muncul dari hasil pengamatan. Pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa adalah: (1) apa pengertian jarak antara dua titik?, (2) bagaimana menentukan jarak antara dua titik?

Mengumpulkan Informasi

Berikut disajikan jawaban untuk **Tabel 1.2.**

Tabel 1.2 Jarak Antartitik dalam bangun ruang.

No.	Bangun Ruang	Pertanyaan	Jawaban
1.	H G E F D C A B	a. Manakah yang merupakan jarak antara titik F dan G? b. Manakah yang merupakan jarak antara titik B dan D?	a. Panjang ruas garis FG b. Panjang ruas garis BD.
2.	R Q O P N M K L	a. Manakah yang merupakan jarak antara titik P dan N? b. Manakah yang merupakan jarak antara titik Q dan L?	a. Panjang diagonal ruang PN b. Panjang diagonal bidang QL

No.	Bangun Ruang	Pertanyaan	Jawaban
3.		a. Manakah yang merupakan jarak antara titik E dan F? b. Manakah yang merupakan jarak antara titik B dan D?	a. Panjang ruas garis EF b. panjang diagonal bidang BD
4.		a. Manakah yang merupakan jarak antara titik T dan D? b. Manakah yang merupakan jarak antara titik B dan D?	a. Panjang ruas garis TD b. Panjang diagonal BD

Menalar

- Pada kegiatan Ayo Menalar, ajak siswa untuk mengonstruksi rumus jarak antartitik. Dalam mengonstruksi rumus, siswa diberi pengantar tentang cara kerja Radar.

Mengonstruksi Rumus Jarak Antartitik

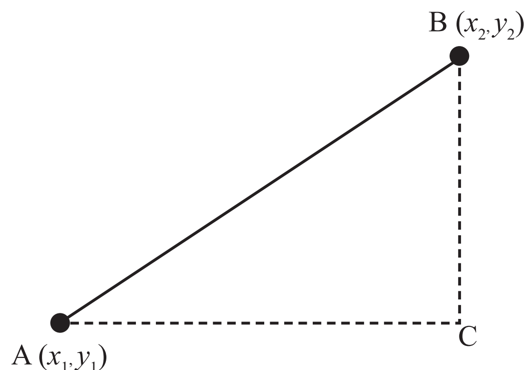
Radar (dalam bahasa inggris merupakan singkatan dari *Radio Detection and Ranging*) adalah suatu sistem gelombang elektromagnetik yang berguna untuk mendeteksi, mengukur jarak dan membuat peta benda-benda seperti pesawat terbang, kapal laut, berbagai kendaraan bermotor dan informasi cuaca. Radar dapat mendeteksi posisi suatu benda melalui layar seperti berikut.



Gambar 1.5. Tampilan Layar Radar

Sumber: http://www.dreamstime.com/royalty-free-stock-image-radar-screen-image28624986

- Minta siswa untuk mencermati Gambar 1.7.



Gambar 1.7. Segitiga siku-siku ACB

Misal diberi titik A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2). Dengan menggunakan teorema Pythagoras, jarak titik A dan B (d).

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Mengomunikasikan

- Beri kesempatan kepada siswa untuk membuat kesimpulan tentang jarak antartitik.
- Minta siswa untuk menukarkan kesimpulan yang telah dibuatnya dengan siswa lain.
- Kemudian beri kesempatan kepada beberapa siswa untuk menyampaikan kesimpulannya.

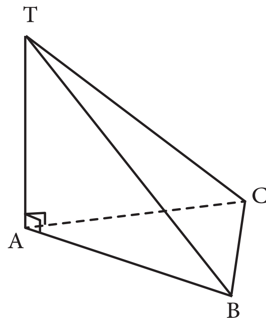
Setelah siswa selesai membuat kesimpulan dan mengomunikasikannya, minta siswa untuk mengerjakan soal latihan Subbab 1.1 Jarak Antartitik. Pembahasan soal latihan subbab 1.1 disajikan dalam bagian evaluasi dalam buku guru ini.

Pembahasan Soal Latihan 1.1

Jawablah soal berikut disertai dengan langkah pengerjaannya.

1. Diketahui limas beraturan T.ABC dengan bidang alas berbentuk segitiga sama sisi. TA tegak lurus dengan bidang alas. Jika panjang AB = $4\sqrt{2}$ cm dan TA = 4 cm, tentukan jarak antara titik T dan C.

Alternatif Penyelesaian:

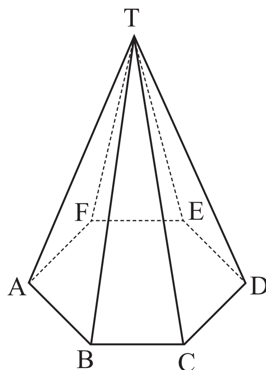


$TA \perp AC$, Sehingga

$TC = \sqrt{AC^2 + TA^2} = \sqrt{32+16} = 4\sqrt{3}$ cm

Jadi jarak antara titik T dan C adalah $4\sqrt{3}$ cm.

2. Perhatikan limas segi enam beraturan berikut.



Diketahui panjang AB = 10 cm dan TA = 13 cm. Titik O merupakan titik tengah garis BE. Tentukan jarak antara titik T dan O.

Alternatif Penyelesaian:

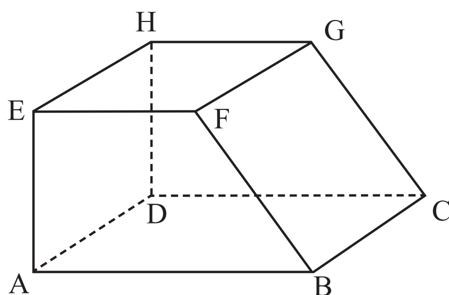
$OE = AB = 10$

TE = TA = 13 cm.

$TO = \sqrt{TE^2 - OE^2} = \sqrt{169-100} = \sqrt{69}$

Jadi jarak titik T dan O adalah $\sqrt{69}$ cm.

3. Perhatikan bangun berikut ini



Jika diketahui panjang AB = 5 cm, AE = BC = EF = 4 cm maka tentukan

a. Jarak antara titik A dan C
b. Jarak antara titik E dan C
c. Jarak antara titik A dan G

Alternatif Penyelesaian:

a. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ cm

b. $EC = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \sqrt{16+41} = \sqrt{57} =$ cm

c. $AG = \sqrt{AH^2 + HG^2} = \sqrt{32+16} = \sqrt{48}$ cm

Subbab 1.2. Jarak Titik ke Garis

Mengamati

- Pada kegiatan mengamati, minta siswa untuk mencermati Tabel 1.3. Pada Tabel 1.3 disajikan informasi tentang jarak titik ke garis pada ruang dimensi tiga.

NO.	Bangun Ruang	Pertanyaan
1.	H G E F D C A B	Dari gambar di samping, panjang ruas garis EA adalah jarak antara titik E dengan ruas garis AB. Panjang ruas garis BC merupakan jarak antara titik C dengan ruas garis AB.
2.	R Q P O N M K L	Dari gambar di samping, panjang OR merupakan jarak antara titik R dengan ruas garis OP.
3.	H G E F D C A B	Dari gambar di samping panjang ruas garis DC merupakan jarak antara titik D dengan ruas garis BC. Panjang ruas garis AE merupakan jarak antara titik A dengan ruas garis EF.

- Setelah siswa mengamati, beri kesempatan kepada siswa untuk menuliskan istilah penting hasil pengamatan pada tempat yang telah disediakan.

Menanya

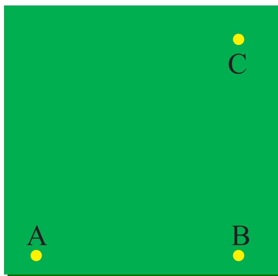
- Minta siswa untuk menulis pertanyaan dari masalah-masalah yang disajikan dalam kegiatan Ayo, Mengamati. Beri kesempatan kepada siswa untuk menulis dugaan yang mungkin muncul dari hasil pengamatan. Pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa adalah: (1) Apa pengertian jarak titik ke garis? (2) Bagaimana menentukan jarak titik ke garis?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

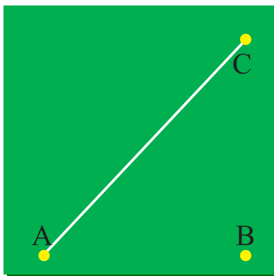
- Pada kegiatan menggali informasi dan menalar, siswa diberi tiga masalah yaitu: masalah 4, masalah 5, dan masalah 6. Masalah 4 merupakan aktivitas siswa dalam menentukan jarak titik ke garis. Aktivitas tersebut diilustrasikan dari paku yang ditancapkan pada papan. Pada masalah 5 siswa di beri kubus, kemudian siswa diminta untuk menentukan jarak titik ke diagonal. Pada masalah 6, siswa diajak untuk mengonstruksi rumus menentukan jarak pada suatu segitiga siku-siku.

- **Masalah 1.4**

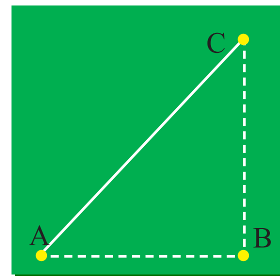
  Untuk mengamati konsep jarak titik ke garis diberikan masalah tiga paku yang ditancapkan pada papan sehingga menjadi titik sudut segitiga siku-siku (lihat Gambar 1.8.a). Seutas tali diikatkan pada dua paku yang ditancapkan (lihat Gambar 1.8.b). Misalkan paku-paku tersebut digambarkan sebagai titik A, B, dan C seperti Gambar 1.8.c dengan AC = 6cm, BC = 8cm, dan AB = 10 cm.



Gambar 1.8.a



Gambar 1.8.b



Gambar 1.8.c

Gambar 1.8. Ilustrasi paku yang ditancapkan pada papan

  Melalui eksperimen kecil, minta siswa untuk menentukan panjang tali minimal yang menghubungkan paku C (titik C) dengan tali yang terpasang pada paku A dan paku B (segmen garis AB). Kemudian beri pertanyaan kepada siswa tentang syarat yang harus dipenuhi agar mendapatkan panjang tali minimal. Minta siswa untuk memberi alasan atas jawaban yang disampaikannya.

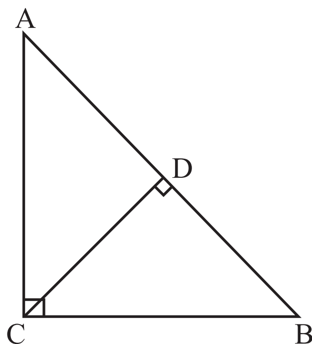
- **Masalah 1.5**

  Untuk menentukan jarak titik ke garis, diberikan contoh bagaimana menentukan jarak titik ke diagonal bidang pada kubus ABCD.EFGH. Minta siswa untuk mencermati masalah 5 dengan seksama.

- **Masalah 1.6**

  Masalah 6 berisi tentang bagaimana mengonstruksi rumus jarak pada segitiga siku-siku. Diberikan segitiga siku-siku ABC seperti berikut.

  Misal AB = c, BC = a, AC = b dan CD = d. Garis CD merupakan garis tinggi.



Untuk menentukan d, dapat digunakan rumus $d = \frac{ab}{c}$. Rumus ini diperoleh dengan cara sebagai berikut:

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} AB.CD = \frac{1}{2} cd$. Selain itu Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} AB.CD = \frac{1}{2} cd$.

Sehingga
$$\begin{aligned} Luas\,\Delta ABC &= Luas\,\Delta ABC \\ \frac{1}{2}ab &= \frac{1}{2}cd \\ ab &= cd \\ d &= \frac{ab}{c} \end{aligned}$$

Mengomunikasikan

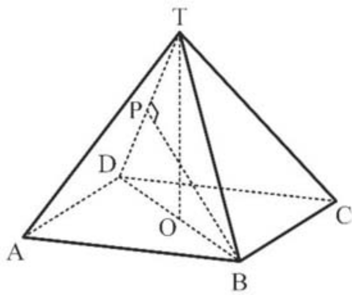
- Beri kesempatan kepada siswa untuk membuat kesimpulan tentang jarak titik ke garis.
- Minta siswa untuk menukarkan kesimpulan yang telah dibuatnya dengan siswa lain.
- Kemudian beri kesempatan kepada beberapa siswa untuk menyampaikan kesimpulannya.

Setelah siswa selesai membuat kesimpulan dan mengomunikasikannya, minta siswa untuk mengerjakan soal latihan subbab 1.2 Jarak Titik ke Garis. Pembahasan soal latihan subbab 1.2 disajikan dalam bagian evaluasi dalam buku guru ini.

Pembahasan Soal Latihan 1.2

1. Diketahui limas beraturan T.ABCD, panjang rusuk AB = 3 cm dan TA = 6 cm. Tentukan jarak titik B dan rusuk TD.

   Alternatif Penyelesaian:



Misal P proyeksi titik B ke ruas garis TD. Jarak titik B ke rusuk TD adalah BP.

$$TO = \sqrt{TB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

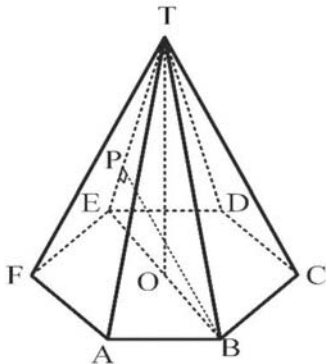
$$L\Delta TBD = L\Delta TBD$$

$$\frac{1}{2}BD.TO = \frac{1}{2}TD.BP$$

$$BP = \frac{BD.TO}{TD} = \frac{3\sqrt{2}.\frac{3}{2}\sqrt{14}}{6} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Jadi, jarak titik B ke rusuk TD adalah $\frac{3}{2}\sqrt{7}$ cm.

2. Diketahui limas segi enam beraturan T.ABCDEF dengan panjang rusuk AB = 10 cm dan AT = 13 cm. Tentukan jarak antara titik B dan rusuk TE.



Misal jarak titik B dan rusuk TE = BP.

$$TO = \sqrt{TE^2 - OE^2} = \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69} \text{ cm.}$$

$$L\Delta TEB = L\Delta TEB$$

$$\frac{1}{2}BE.TO = \frac{1}{2}TE.BP$$

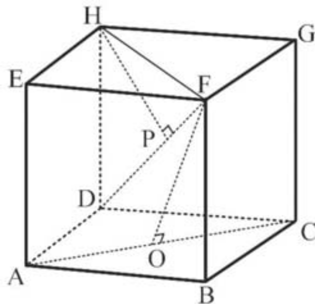
$$BP = \frac{BE.TO}{TE}$$

$$BP = \frac{20.\sqrt{69}}{13}$$

Jadi jarak titik B ke rusuk TE adalah $\frac{20\sqrt{69}}{13}$ cm.

3. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang AB = 10 cm. Tentukan
   a. jarak titik F ke garis AC
   b. jarak titik H ke garis DF

Alternatif Penyelesaian:



a. Jarak titik F ke garis AC (FO)

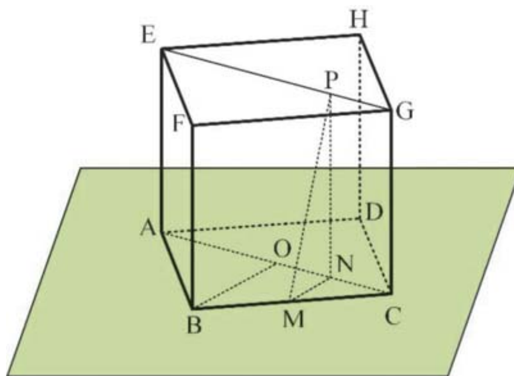
$$FO = \sqrt{BF^2 + OB^2} = \sqrt{100+50}$$
$$= \sqrt{150} = \text{cm}$$

b. Jarak titik H ke garis DF (HP)

$$HP = \frac{FH.DH}{DF} = \frac{10\sqrt{2}.10}{10\sqrt{3}} = \frac{10}{3}\sqrt{6}\ \text{cm}$$

4. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm. Titik M adalah titik tengah BC. Tentukan jarak M ke EG.

Alternatif Penyelesaian:



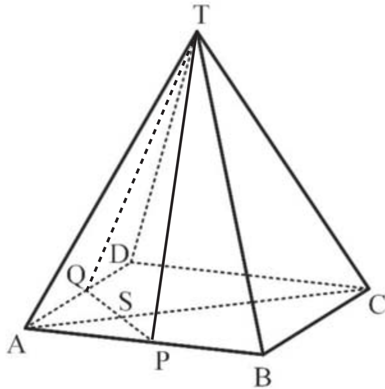
Misal jarak M ke ruas garis *EG* adalah *PM.*

Perhatikan segitiga BOC dan MNC, segitiga tersebut sebangun sehingga

$$\frac{MN}{MC} = \frac{BO}{BC} \rightarrow MN = \frac{4\sqrt{2}}{8}\,4 = 2\sqrt{2}\,cm$$

$$PM = \sqrt{PN^2 + MN^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{64+8}$$
$$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$$

5. Perhatikan limas segiempat beraturan berikut.



Titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AB dan AD. Jika panjang AB = TA = 12 cm, tentukan jarak antara titik T dan garis PQ.

Alternatif Penyelesaian:

$$TP = \sqrt{TB^2 - PB^2} = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Misal S adalah titik tengah QP. Jarak titik Tdan garis PQ adalah TS.

$$PS = \frac{1}{2}\text{PQ} = 3\sqrt{2}$$

$$TS = \sqrt{TP^2 - PS^2} = \sqrt{108 - 18} = 3\sqrt{10} \text{ cm.}$$

Jadi jarak titik T dan garis PQ adalah $3\sqrt{10}$ cm.

Subbab 1.3. Jarak Titik ke Bidang

Mengamati

- Pada kegiatan mengamati, minta siswa untuk mencermati Tabel 1.4 dan masalah 2.7. Tabel 1.4 berisi informasi tentang jarak titik ke bidang pada ruang dimensi tiga. Ajak siswa untuk mencermati informasi dalam Tabel 1.4. Setelah siswa mencermati Tabel 1.4, minta siswa untuk mencermati masalah 1.7. Masalah 1.7 berisi informasi tentang bagaimana menentukan panjang tiang penyangga. Masalah ini merupakan penerapan konsep jarak titik ke bidang. Berikut disajikan Tabel 1.4 dan Masalah 7.

Tabel 1.4 Jarak Titik ke Bidang

NO.	Bangun Ruang	Pertanyaan
1.		Panjang ruas garis BC merupakan jarak antara titik B dengan bidang DCGH. Panjang ruas garis CD merupakan jarak antara titik C dengan bidang ADHE.
2.		Panjang ruas garis KN merupakan jarak antara titik K dengan bidang MNRQ. Panjang ruas garis OP merupakan jarak antara titik O dengan bidang LMQP.
3.		Panjang ruas garis HE merupakan jarak antara titik H dengan bidang ABFE. Panjang ruas garis CG merupakan jarak antara titik C dengan bidang EFGH

- **Masalah 1.7**

Tiang Penyangga dibuat untuk menyangga atap suatu gedung. Tiang penyangga ini menghubungkan suatu titik pada salah satu sisi gedung dan suatu titik pada bidang atap seperti ditunjukkan pada Gambar 1.9 berikut.



Gambar 1.9. Tiang Penyangga Atap Bangunan

Sumber: http://www.ideaonline.co.id/iDEA2013/Eksterior/Fasad/Batu-Alam-Mencerahkan-Tampilan-Fasad/Tiang Penyangga-Atap

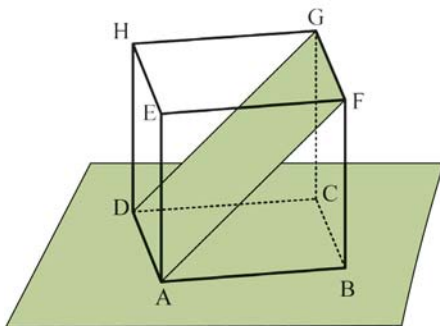
Setelah siswa mengamati, beri kesempatan kepada siswa untuk menuliskan istilah penting hasil pengamatan pada tempat yang telah disediakan.

Mengamati

- Minta siswa untuk menulis pertanyaan dari masalah-masalah yang disajikan dalam kegiatan Ayo Mengamati. Beri kesempatan kepada siswa untuk menulis dugaan yang muncul dari hasil pengamatan. Pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa adalah: (1) Apa pengertian jarak titik ke bidang?, (2) Bagaimana menentukan jarak titik ke bidang?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

- Pada kegiatan menggali informasi dan menalar, siswa diberi dua masalah yaitu: masalah 1.8, dan masalah 1.9. Masalah 1.8 merupakan aktivitas siswa dalam menentukan jarak titik ke bidang pada kubus. Pada masalah 1.9 disajikan cara menentukan jarak titik ke bidang pada limas.
- **Masalah 1.8**
  Untuk mengamati jarak titik ke bidang diberikan masalah seperti berikut.



Gambar 1.11: Bidang AFGD pada kubus ABCD.EFGH

Diberikan kubus ABCD.EFGH dengan Panjang rusuk 4 cm. Titik A, F, G, dan D dihubungkan sehingga terbentuk bidang AFGD seperti gambar di samping. Berapakah jarak titik B ke bidang AFGD?

Ingatkan kembali tentang teorema Pythagoras dan pengertian jarak. Minta siswa untuk menentukan apakah bidang AFGD dan ABFE saling tegak lurus? Apa akibatnya ketika kedua bidang tersebut saling tegak lurus? Setelah menjawab pertanyaan tersebut, minta siswa untuk membaca dan memahami alternatif penyelesaian yang disajikan pada buku siswa.

- **Masalah 1.9**
  Masalah 1.9 serupa dengan Masalah 1.8. Pada masalah 1.9 siswa diberi limas T.ABCD dengan alas persegi dan siswa diminta untuk menentukan jarak titik O ke bidang TBC.

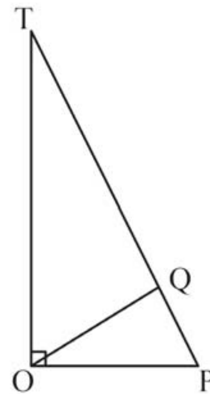
Minta siswa untuk mengingat kembali cara menentukan luas segitiga. Rumus luas segitiga ini digunakan untuk menentukan jarak titik O ke bidang TBC.
Luas segitiga TOP adalah TO.OP atau dapat dicari dari TP.OQ.

$$\text{LD TOP} = \text{LD TOP}$$

$$\frac{1}{2}\text{TO.OP} = \frac{1}{2}\text{TP.OQ}$$

$$\text{TO.OP} = \text{TP.OQ}$$

$$\text{OQ} = \frac{\text{TO.OP}}{\text{TP}}$$



Mengomunikasikan

- Beri kesempatan kepada siswa untuk membuat kesimpulan tentang jarak titik ke garis.
- Minta siswa untuk menukarkan kesimpulan yang telah dibuatnya dengan siswa lain.
- Kemudian beri kesempatan kepada beberapa siswa untuk menyampaikan kesimpulannya.

Setelah siswa selesai membuat kesimpulan dan mengomunikasikannya, minta siswa untuk mengerjakan soal latihan subbab2.3 Jarak Titik ke Bidang. Pembahasan soal latihan subbab 1.3 disajikan dalam bagian evaluasi dalam buku guru ini.

Kegiatan Penutup

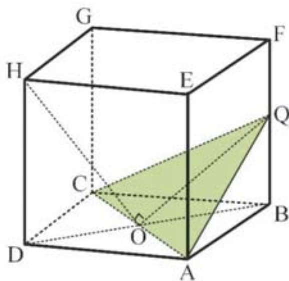
- Minta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajar. Bersama-sama dengan siswa, berikanlah review dan penguatan terhadap kegiatan belajar.

Pembahasan Soal Latihan 1.3

Jawablah soal berikut disertai dengan langkah pengerjaannya.

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH yang panjang rusuknya a cm. Titik Q adalah titik tengah rusuk BF. Tentukan jarak titik H ke bidang ACQ.

Alternatif Penyelesaian

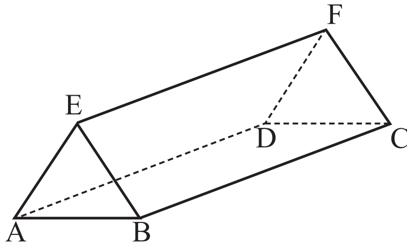


HO $\perp$ AC sehingga jarak titik H ke bidang ACQ adalah HO.

$$HO = \sqrt{DO^2 + DH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}\ \text{cm}$$

Jadi jarak titik H ke bidang ACQ adalah $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$ cm

2. Suatu kepanitiaan membuat papan nama dari kertas yang membentuk bangun seperti berikut.



Ternyata ABE membentuk segitiga sama sisi, panjang BF = 13 cm dan BC = 12 cm. Tentukan jarak antara titik A dan bidang BCFE.

Alternatif Penyelesaian

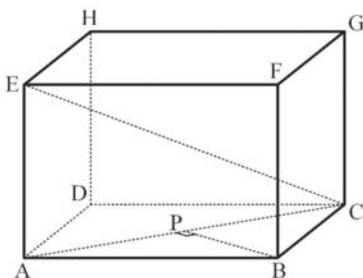
Misal jarak titik A dengan bidang BCFE adalah *d*.

$$EB = \sqrt{BF^2 - EF^2} = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{ cm.}$$

$$d = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}EB\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Jadi jarak titik A dengan bidang BCFE adalah $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm.

3. Dari gambar di bawah, jika diketahui panjang AB=8 cm, BC=6 cm dan EC=$5\sqrt{5}$ cm, tentukan jarak antara titik B dan bidang ACE.



Alternatif Penyelesaian

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ cm.}$$

Misal jarak antara titik B dengan bidang ACE adalah *d*.

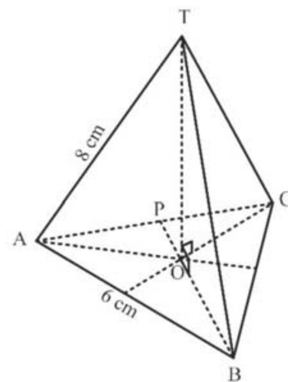
$$d = \frac{AB.BC}{AC} = \frac{8.6}{10} = 4{,}8 \text{ cm.}$$

4. Diketahui limas segitiga beraturan T.ABC . Panjang AB = 6 cm dan TA = 8 cm. Tentukan jarak antara titik T dengan bidang ABC.

Alternatif Penyelesaian

Dari gambar di samping, jarak antara titik T dengan bidang ABC adalah ruas garis TO. $\overline{TO} \perp \overline{PB}$, sehingga

$TO = \sqrt{TB^2 - BO^2}$.



Segitiga ABC adalah segitiga sama sisi sehingga AB = BC = CA = 6 cm, sedangkan PA = 3 cm.

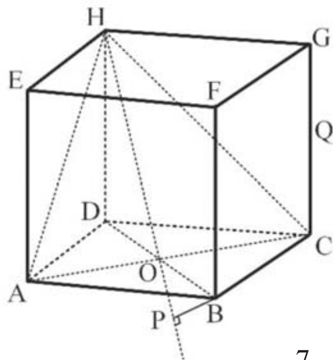
Panjang PB = $\sqrt{AB^2 - PA^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ cm.

OB = $\frac{2}{3}$ PB = $\frac{2}{3}\, 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm.

TO = $\sqrt{TB^2 - BO^2} = \sqrt{8^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{13}$ cm.

5. Diketahui luas permukaan kubus ABCD.EFGH adalah 294 cm^2. Tentukan
   a. Jarak antara titik F ke bidang ADHE.
   b. Jarak antara titik B ke bidang ACH.

   Alternatif Penyelesaian



Diketahui luas permukaan kubus ABCD.EFGH adalah 294 cm^2.

Maka panjang rusuk kubus $= \sqrt{\frac{294}{6}}$

$= \sqrt{49} = 7$ cm.

a. Jarak antara titik F ke bidang ADHE adalah ruas garis FE = 7 cm.

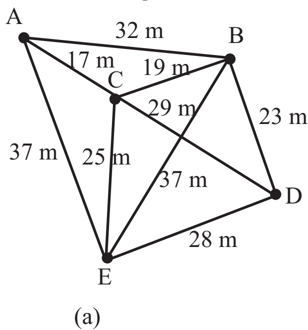
b. Perhatikan gambar di atas. $\overline{OB} \perp \overline{AC}$, sehingga $\overline{OB}$ merupakan jarak antara titik B dengan bidang ACH.

$$\frac{DH}{BP} = \frac{HO}{BO} \Leftrightarrow \frac{7}{BP} = \frac{\frac{7}{3}\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

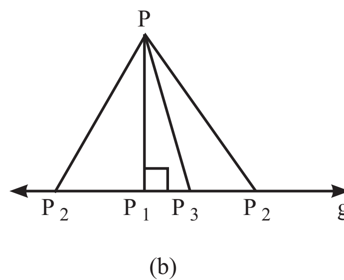
$$\Leftrightarrow \frac{7}{BP} = \sqrt{3} \Leftrightarrow BP = \frac{7}{3}\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Pembahasan Uji Kompetensi 1.

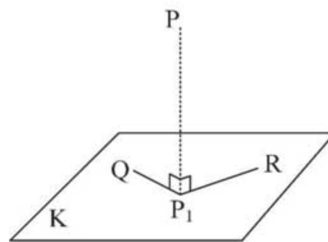
1. Perhatikan gambar berikut.



(a)



(b)



(c)

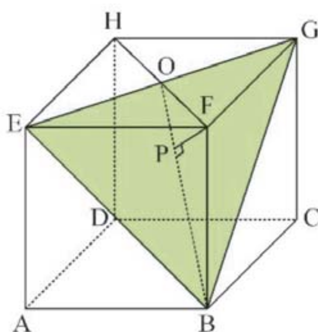
a. Dari Gambar (a), tentukan jarak dari titik A ke D.
b. Dari Gambar (b), tentukan jarak titik P terhadap garis g .
c. Dari Gambar (c), tentukan jarak titik P pada bidang-K.

Alternatif Penyelesaian

a. Jarak titik A ke D = 46 m.
b. Jarak titik P terhadap garis g adalah panjang ruas garis PP_1
c. Jarak titik P ke bidang K adalah panjang ruas garis PP_1

2. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 9 cm. Buat ilustrasi kubus tersebut. Tentukan langkah menentukan jarak titik F ke bidang BEG. Kemudian hitunglah jarak titik F ke bidang BEG.

Alternatif Penyelesaian



Langkah menentukan jarak titik F ke bidang BEG.

a. Hubungkan titik F dengan titik H. diperoleh perpotongan ruas garis HF dengan BEG. Misal perpotongan tersebut titik O.
b. Hubungkan titik O dengan titik B. Karena titik O dan titik B terletak pada bidang BEG, ruas garis OB terletak pada bidang BEG.
c. Misal P adalah proyeksi titik F pada bidang BEG. Jarak titik F ke bidang BEG adalah panjang ruas garis FP.

$$OF = \frac{1}{2}FH = \frac{9}{2}\sqrt{2} \quad \text{cm.}$$

$$AS = \sqrt{AC^2 - CS^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4}{3}a^2} = \frac{a}{3}\sqrt{6} \quad \text{cm.}$$

$$PF = \frac{OF.FB}{OB} = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

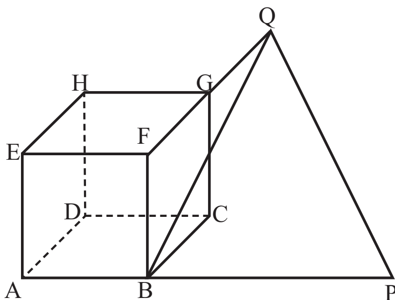
Jadi, jarak titik F ke bidang BEG adalah $2\sqrt{3}$ cm.

3. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a. Jika titik P terletak pada perpanjangan AB sehingga PB = 2a, dan titik Q pada perpanjangan FG sehingga QG = a.

   a. Buatlah ilustrasi dari masalah di atas.

   b. Tentukan PQ.

   Alternatif Penyelesaian.



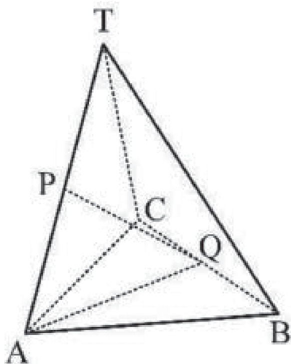
$$BQ = \sqrt{BF^2 + FQ^2} = a\sqrt{5}$$

$$BP = 2a$$

Sehingga $PQ = \sqrt{BQ^2 + BP^2} = 3a$

4. Panjang setiap bidang empat beraturan T.ABC sama dengan 16 cm. Jika P pertengahan AT dan Q pertengahan BC, tentukan PQ.

   Alternatif Penyelesaian.



$$BQ = \frac{1}{2}BC = 8, \; AP = \frac{1}{2}TA = 8$$

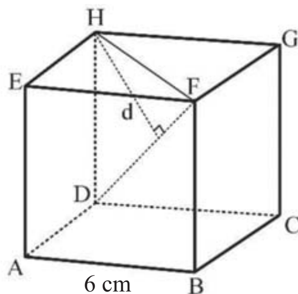
$$AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2} = 8\sqrt{3}$$

$$PQ = \sqrt{AQ^2 - AP^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2 - 8^2} = 8\sqrt{2}$$

Jadi PQ = $8\sqrt{2}$ cm

5. Perhatikan gambar kubus ABCD.EFGH. Tentukan jarak titik H ke DF. AB = 6 cm

Alternatif Penyelesaian.



DH = 6 cm dan HF = $6\sqrt{2}$ cm. Misal jarak titik H ke DF adalah *d*.

$$d = \frac{DH.FH}{DF} = \frac{6.6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{6}{3}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Jadi, jarak titik H ke DF adalah $2\sqrt{6}$ cm.

6. Dalam kubus ABCD.EFGH titik S adalah titik tengah sisi CD dan P adalah titik tengah diagonal ruang BH. Tentukan perbandingan volum limas P.BCS dan volum kubus ABCD.EFGH.

Alternatif Penyelesaian.

Misal panjang rusuk kubus = *r*.

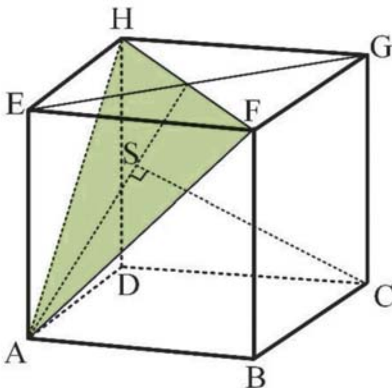
Volume kubus ABCD.EFGH = r^3

Volume limas P.BCS $= \frac{1}{3} Luas\ alas.tinggi = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}r.r\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{24}r^2$

Volume limas P.BCS : Volume kubus ABCD.EFGH = $\frac{}{24}r^2 : r^2 \quad 1:24$

7. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk *a* cm. S merupakan proyeksi titik C pada bidang AFH. Tentukan jarak titik A ke titik S.

Alternatif Penyelesaian.



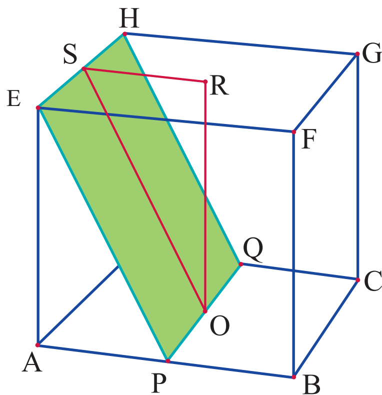
$$CS = \frac{2}{3}CE = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$$

$$AC = a\sqrt{2}$$

$$AS = \sqrt{AC^2 - CS^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4}{3}a^2} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

8. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk *a* cm. P dan Q masing-masing merupakan titik tengah AB dan CD, sedangkan R merupakan titik potong EG dan FH. Tentukan jarak titik R ke bidang EPQH.

Alternatif Penyelesaian.



Misal jarak titik R ke bidang EPQH adalah *d.*

$$SR = \frac{1}{2}a \quad \text{dan} \quad OR = a$$

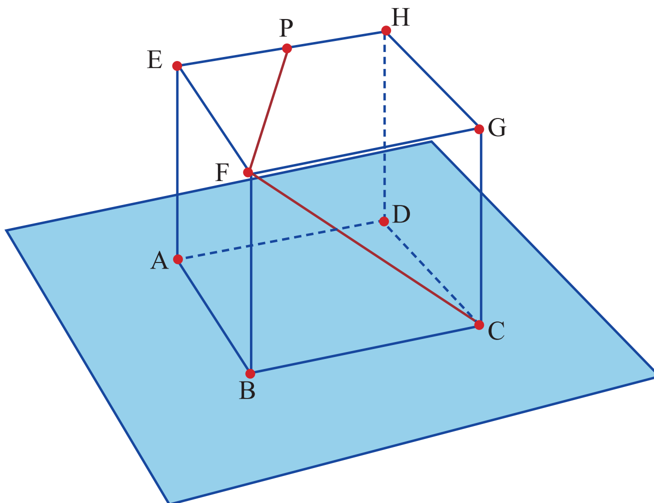
$$SO = \sqrt{SR^2 + OR^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$d = \frac{SR.OR}{SO} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{5}a\sqrt{5}$$

Jadi, jarak titik R ke bidang EPQH adalah $\frac{1}{5}a\sqrt{5}$ cm.

9. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 4 cm. P titik tengah EH. Tentukan jarak titik P ke garis CF.

Alternatif Penyelesaian.

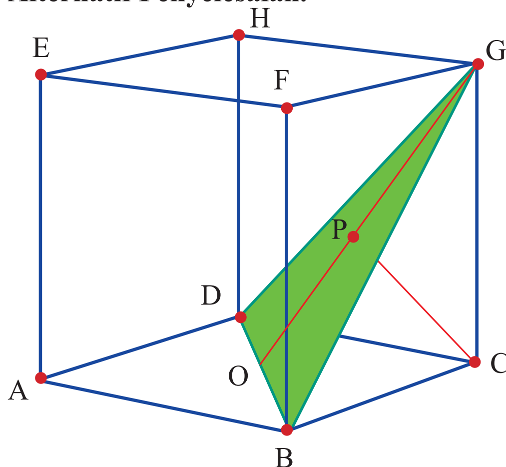


Misal jarak titik P ke ruas garis CF adalah PF. Dengan menggunakan Theorema Pythagoras diperoleh

$$PF = \sqrt{PE^2 + EF^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{20}$$
$$= 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

10. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah 6 cm. Tentukan jarak titik C dengan bidang BDG.

Alternatif Penyelesaian.



Misal titik P adalah proyeksi titik C ke bidang BDG.

OC = $3\sqrt{2}$ cm, CG = 6 cm, dan $OG = 3\sqrt{6}$ cm.

$$CP = \frac{OC.CG}{OG} = \frac{3\sqrt{2}.6}{3\sqrt{6}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Jadi, jarak titik C dengan bidang BDG adalah $2\sqrt{3}$ cm.

BAB 2

STATISTIKA

A. Kompetensi Inti (KI) dan Kompetensi Dasar (KD)

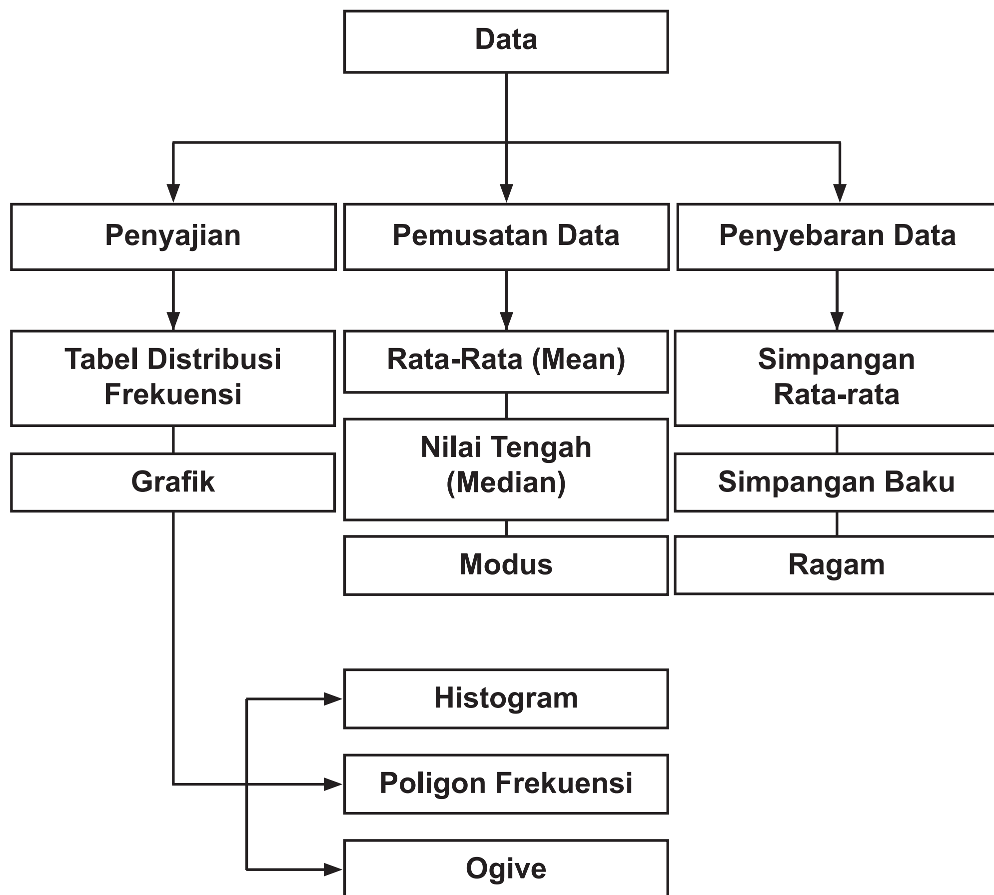
Kompetensi Inti	Kompetensi Dasar
1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2. Menunjukkan perilaku jujur, disiplin, tanggung-jawab, peduli (gotong royong, kerjasama, toleran, damai), santun, responsif dan proaktif sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta alam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia. 3. Memahami, menerapkan, menganalisis dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konsep-tual, prosedural berdasarkan rasa ingintahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah. 4. Mengolah, menalar, menyaji, dan mencipta dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, serta bertindak secara efektif dan kreatif dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.	3.2 Menentukan dan menganalisis ukuran pemusatan dan penyebaran data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram. 4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penyajian data hasil pengukuran dan pencacahan dalam tabel distribusi frekuensi dan histogram.

B. Tujuan Pembelajaran

Melalui aktivitas mengamati, mempertanyakan bahan amatannya, melakukan penyelidikan dan mengumpulkan informasi, mengasosiasi semua informasi yang diperoleh, dan mengomunikasikan hasilnya baik dalam kelompok dan klasikal, siswa mampu:

1. Menentukan ukuran pemusatan data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram.
2. Menganalisis ukuran pemusatan data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram.
3. Menentukan ukuran penyebaran data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram.
4. Menganalisis ukuran penyebaran data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram.

C. Diagram Alur Konsep



D. Proses Pembelajaran

2.1 Penyajian Data

Distribusi Frekuensi

Kegiatan Pendahuluan

- Sebelum memulai pengamatan, guru meminta siswa untuk mengingat kembali tentang data tunggal dan bagaimana menyajikan data dalam bentuk grafik yang sudah dipelajari di jenjang sebelumnya.
- Guru memeriksa pengetahuan awal siswa dengan memberikan data yang terdiri dari 10 datum dan meminta siswa untuk menyajikannya dalam diagram batang.
- Setelah mendapatkan diagram batang yang dikerjakan siswa, guru mengajukan pertanyaan bagaimana jika data yang dihadapi berukuran besar (minimal terdiri dari 30 data). Mungkinkah data yang berukuran besar disajikan dalam bentuk diagram batang? Informasi apa saja yang dapat diperoleh dari data berukuran besar jika tidak diubah ke dalam tabel dan grafik?
- Guru mengarahkan siswa bagaimana pentingnya mengelompokkan data berukuran besar dan menyajikannya dalam grafik.

Kegiatan Inti

Guru meminta siswa mengamati data yang diberikan pada Contoh 2.1, Contoh 2.2, dan Contoh 2.3 beserta informasi yang disediakan berkaitan dengan data tersebut dengan seksama.

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan mengenai data dan informasi yang disajikan.
- Guru juga bisa meminta siswa untuk membuat kesimpulan awal mengenai data yang diamati yang kebenarannya akan diuji di bagian selanjutnya.
- Guru dapat mengarahkan siswa untuk mengamati lebih lanjut mengenai informasi yang menyertai data dan membuat pertanyaan terkait informasi tersebut.

- Guru meminta semua siswa untuk menuliskan pertanyaan atau kesimpulan awal yang didapatkan pada kotak yang sudah disediakan.
- Guru mencatat semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian memilih pertanyaan-pertanyaan secara bersama-sama untuk dijawab melalui kegiatan berikutnya. Pertanyaan yang dipilih sebaiknya merupakan pertanyaan yang menyangkut pengolahan data berukuran besar, pengelompokan data dan penarikan kesimpulan dari data yang di antaranya adalah:
    1) Bagaimana cara mendapatkan kesimpulan untuk setiap data?
    2) Bagaimana menghitung data pada selang tertentu?
    3) Apa itu distribusi frekuensi?
    4) Bagaimana mendapatkan distribusi frekuensi dari data mentah?

- Guru meminta siswa untuk mencoba menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sudah disepakati sebelumnya secara berkelompok.
- Untuk mendapatkan jawaban yang lebih tepat, guru meminta siswa untuk memperhatikan lebih teliti Contoh 2.4, Contoh 2.5, dan Contoh 2.6 bagaimana mendapatkan tabel yang diberikan.
- Untuk lebih spesifik, guru meminta siswa memperhatikan Contoh 2.4. dan distribusi frekuensi yang diberikan seperti berikut ini.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
16 – 20	15,5 – 20,5	19
21 – 25	20,5 – 25,5	15
26 – 30	25,5 – 30,5	21
31 – 35	30,5 – 35,5	16
36 – 40	35,5 – 40,5	9

- Guru meminta siswa memperhatikan apa saja yang diisikan di setiap kolom.
- Pada kolom kelas, siswa diminta mengamati pembagian kelompok data dan panjang untuk setiap kelasnya. Siswa juga diminta untuk mengamati ada berapa banyak kelas dalam distribusi frekuensi tersebut.
- Pada kolom batas kelas, siswa diminta untuk menemukan hubungan antara batas kelas dengan kelas pada kolom pertama.
- Pada kolom frekuensi, siswa diminta untuk menemukan bagaimana cara menghitung frekuensi untuk setiap kelasnya.

- Siswa diminta menuliskan hasil pencarian informasi untuk mendapatkan dugaan awal bagaimana mengolah data dari data mentah menjadi distribusi frekuensi. Dugaan awal ini diverifikasi dengan menggunakan Contoh 2.5 dan Contoh 2.6 dan siswa diminta untuk memperbaiki dugaan awalnya jika ditemukan ketidakcocokan pada kedua contoh tersebut.
- Guru mendampingi dan membantu siswa jika terdapat kesulitan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun individu.
- Selanjutnya siswa diharapkan mampu mengaitkan informasi-informasi yang diperoleh dan mendapatkan kesimpulan sementara tentang distribusi frekuensi dan bagaimana mendapatkan distribusi frekuensi.
- Guru meminta siswa untuk melengkapi tabel 2.4, yaitu distribusi frekuensi dari data pada Contoh 2.1 jika data dikelompokkan menjadi tujuh kelas. Siswa dapat melengkapi tabel dengan menggunakan dugaan awal yang diperoleh sebelumnya.

Tabel 2.4 yang harus didapatkan siswa adalah sebagai berikut.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
16 – 19	15,5 – 19,5	14
20 – 23	19,5 – 23,5	13
24 – 27	23,5 – 27,5	15
28 – 31	27,5 – 31,5	19
32 – 35	31,5 – 35,5	10
36 – 39	35,5 – 39,5	5
40 – 43	39,5 – 43,5	4

- Siswa juga diminta untuk menuliskan kesimpulan yang dapat diperoleh dari tabel (distribusi frekuensi) yang sudah dilengkapi. Sebagai contoh: “Kebanyakan pengusaha berani memulai usahanya dengan serius pada usia sekitar 28 – 31 tahun, yaitu sebanyak 19 orang.”
- Selanjutnya, guru meminta siswa melengkapi tabel berikutnya yang hampir sama dengan tabel sebelumnya. Sebaiknya guru menanyakan kepada siswa apa perbedaan yang dapat diamati dari tabel 2.4 dan tabel 2.5. Perbedaan utama tabel tersebut terletak pada pembagian kelas dan batas kelas yang diberikan.

Tabel 2.5 yang harus didapatkan siswa adalah

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
16 – 19	15,5 – 19,5	
19 – 22	18,5 – 22,5	
22 – 25	21,5 – 25,5	

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
25 – 28	24,5 – 28,5	
28 – 31	27,5 – 31,5	
31 – 34	30,5 – 34,5	
34 – 37	33,5 – 37,5	
37 – 40	36,5 – 40,5	

Untuk mengisi tabel 2.5 dengan ujung atas (tepi atas) suatu kelas sama dengan ujung bawah (tepi bawah) kelas berikutnya, siswa akan kebingungan dalam menghitung frekuensi ketika ada data yang termasuk dalam kedua kelas. Sebagai contoh, usia 19 pada data Contoh 1 dapat dimasukkan pada kelas pertama maupun kedua. Jika 19 dimasukkan ke dalam kedua kelas tersebut maka jumlah keseluruhan frekuensinya akan melebihi total data pada Contoh 1.

- Setelah mengisi tabel 2.5 sesuai data pada Contoh 2.1, siswa diharapkan mampu menjawab beberapa pertanyaan yang menyertai. Berikut merupakan alternatif jawaban dari pertanyaan-pertanyaan yang diberikan,

1. Apa yang terjadi pada kolom batas kelas?
   Jawab:
   Selang pada batas kelas ada yang beririsan. Sebagai contoh, selang pertama pada batas kelas beririsan dengan selang pada batas kelas kedua. Seharusnya batas atas kelas pertama merupakan batas bawah kelas berikutnya tetapi pada tabel tersebut, batas atas kelas pertama lebih besar dari batas bawah kelas berikutnya.
2. Apa yang terjadi pada saat pengisian kolom frekuensi?
   Jawab:
   Ada data yang masuk di dua kelas yang berbeda. Sebagai contoh, 19 dapat masuk di kelas pertama yaitu selang 16 – 19 dan dapat masuk di kelas yang kedua yaitu 19 – 22.
3. Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai batas atas dan batas bawah kelas dalam hubungannya dengan frekuensi?
   Jawab:
   Agar data dapat dikelompokkan dan setiap nilai dalam data dapat masuk dalam tepat satu kelas maka selang setiap kelas tidak ada yang beririsan. Batas atas kelas suatu kelas merupakan batas bawah kelas berikutnya.
   Jika diperhatikan batas kelas menambahkan satu tempat desimal dari kelas. Sebagai contoh untuk selang kelas 16 – 19 didapatkan batas bawahnya adalah 15,5 dan batas atasnya adalah 19,5. Batas-batas kelas ini digunakan untuk memisahkan kelas-kelas sehingga tidak ada sela (celah) dalam distribusi frekuensi.

- Guru meminta siswa untuk menjawab beberapa pertanyaan yang berhubungan dengan panjang dan banyak kelas. Untuk mengelompokkan data menjadi beberapa kelompok yang diinginkan, siswa diminta untuk menentukan nilai minimum dan nilai maksimum dari data yang diberikan. Sebagai contoh data yang diberikan pada Contoh 2.1 mempunyai nilai minimum 16 dan nilai maksimum 40 maka jangkauan dari data tersebut adalah 40 – 16 = 24. Jika ingin dibagi menjadi 7 kelas maka panjang kelas yang dibutuhkan adalah $\frac{24}{7} = 3{,}4$. Hasil ini kemudian dibulatkan ke atas menjadi 4. Sehingga panjang kelas yang dibutuhkan adalah 4. Jika kelas pertama dimulai dengan 16 maka kelas kedua dimulai dengan 16 + 4 = 20. Jadi selang kelas pertama adalah 16 – 19.
- Guru meminta siswa untuk menuliskan kembali langkah-langkah pembuatan distribusi frekuensi kemudian mengecek kebenarannya pada Contoh 2.7 dengan menggunakan kesimpulan yang didapatkan sebelumnya. Siswa dibebaskan untuk menentukan banyak kelas dalam distribusi frekuensi yang dibuat.

Mengomunikasikan

- Guru meminta salah satu siswa/kelompok untuk menyampaikan kesimpulan yang didapatkan dari proses menalar di depan kelas. Guru meminta siswa/kelompok lain untuk memberikan tanggapan atau komentar terhadap hasil yang dipresentasikan.

Kesimpulan yang diharapkan:

Distribusi frekuensi merupakan pengorganisasian data mentah ke dalam bentuk tabel yang terdiri dari kelas-kelas dan frekuensinya. Dengan mengelompokkan data ke dalam kelas-kelas pada distribusi frekuensi memudahkan pengguna data untuk mendapatkan informasi berguna yang lebih banyak.

Berikut ini merupakan langkah-langkah mendapatkan distribusi frekuensi dari data mentah:

a. Menentukan jangkauan. Jangkauan merupakan selisih data paling besar (maksimum) dengan data paling kecil (minimum).

b. Menentukan banyak kelas. Data berukuran besar biasanya dikelompokkan ke dalam minimal 5 kelas.

c. Menentukan panjang kelas. Panjang kelas didapatkan dengan cara membagi jangkauan oleh banyak kelas. Jika diperlukan, panjang kelas didapatkan dengan membulatkan ke atas dari hasil pembagian tersebut.

d. Memilih titik awal yaitu limit bawah kelas pertama. Pemilihan titik awal ini bisa berupa nilai minimum data atau bilangan lainnya yang kurang dari data paling kecil. Dengan menambahkan panjang kelas ke titik awal akan didapatkan titik awal kelas-kelas lainnya. Misalnya titik awal kelas pertama adalah 16 dan panjang kelas adalah 5 maka 21 adalah titik awal kelas kedua, 26 adalah titik awal kelas berikutnya dan seterusnya sampai didapatkan titik awal sebanyak jumlah kelas. Sedangkan titik akhir kelas didapatkan dengan mengurangkan 1 dari titik awal. Dengan demikian kelas pertama adalah 16 – 20 dan kelas-kelas berikutnya didapatkan dengan cara yang sama.

e. Menghitung frekuensi tiap kelas. Penghitungan frekuensi dapat menggunakan turus untuk memudahkan penghitungan.

Kegiatan Penutup

- Berdasarkan hasil mengomunikasikan guru membimbing siswa untuk membuat kesimpulan akhir mengenai distribusi frekuensi dan langkah-langkah pembuatannya.
- Guru memberikan reviu materi dan penguatan terhadap kegiatan belajar yang sudah dilaksanakan.

Histogram, Poligon Frekuensi, dan Ogive

Kegiatan Pendahuluan

- Guru bersama siswa mereviu kembali materi tentang distribusi frekuensi yang sudah dipelajari di kegiatan sebelumnya.
- Guru memberikan motivasi tentang penyajian data baik data tunggal maupun data berkelompok dalam bentuk grafik.
- Guru mengarahkan siswa bagaimana pentingnya mengelompokkan data berukuran besar dan menyajikannya dalam grafik yang sesuai.

Kegiatan Inti

- Guru meminta siswa untuk mengamati Contoh 2.8, Contoh 2.9 dan Contoh 2.9 yang diberikan dalam buku siswa.
- Guru meminta siswa untuk mengamati informasi apa saja yang diberikan pada ketiga contoh tersebut.

- Guru meminta siswa untuk menuliskan/mengajukan semua pertanyaan berdasarkan pengamatan terhadap contoh-contoh yang diberikan.
- Beberapa pertanyaan yang diharapkan muncul adalah:
  1) Apa pengertian histogram, poligon frekuensi, dan ogive?
  2) Bagaimana langkah-langkah membuat histogram, poligon frekuensi, dan ogive dari distribusi frekuensi?
  3) Nilai-nilai apa saja yang tertera dalam histogram, poligon frekuensi, dan ogive?

- Ajak siswa untuk menggali informasi yang disajikan dalam kegiatan Ayo, Menggali Informasi di buku siswa. Minta siswa untuk membaca dan memahami istilah-istilah yang diberikan.
- Untuk lebih memahami bagaimana menggambarkan histogram, poligon frekuensi dan ogive, minta siswa untuk menjawab beberapa pertanyaan yang tertera pada kegiatan Ayo, Menggali Informasi.
- Minta siswa untuk fokus pada Contoh 2.8 yang sudah diamati sebelumnya. Perhatikan bahwa 18, 23, 28, 33, dan 38 merupakan titik tengah (midpoint) dari masing-masing kelas pada distribusi frekuensi yang diberikan. Untuk mendapatkan titik tengah suatu kelas yaitu dengan cara menjumlahkan batas bawah dan batas atas kemdian membagi hasilnya dengan 2. Sebagai contoh pada kelas pertama dengan batas kelas 15,5 – 20,5 maka titik tengahnya adalah 18. Titik tengah setiap kelas dapat ditentukan jika salah satu kelas sudah ditentukan titik tengahnya yaitu dengan cara menambahkan atau mengurangkan panjang kelas ke titik tengah yang sudah diketahui.
- Minta siswa untuk menuliskan informasi apa saja yang dibutuhkan untuk menggambarkan histogram dan poligon frekuensi dari suatu distribusi frekuensi.
- Ajak siswa untuk mengamati lebih lanjut ogive yang diberikan pada Contoh 2.8, Contoh 2.9, dan Contoh 2.10. Minta siswa untuk menjawab pertanyaan yang diberikan di buku siswa pada kegiatan Ayo, Mengumpulkan Informasi dan Menalar.
- Minta siswa untuk menuliskan kembali informasi apa saja yang dibutuhkan untuk mendapatkan ogive dari suatu distribusi frekuensi.
- Guru mengajak siswa untuk mengaitkan kembali semua informasi tentang langkah-langkah menyajikan distribusi frekuensi dalam bentuk grafik secara lebih lengkap.
- Minta siswa untuk menuliskan kesimpulan sementara tentang histogram, poligon frekuensi, dan ogive.

- Guru mengajak siswa selain membahas mengenai langkah-langkah pembuatan tetapi juga bagaimana menceritakan hasil grafik yang diperoleh.
- Selain tentang pembuatan ketiga grafik, guru bersama siswa mencermati tentang kesalahpahaman pemaknaan grafik berupa histogram.
- Minta siswa untuk menuliskan kesimpulan sementara dalam kotak yang disediakan dalam kotak yang disediakan di buku siswa.

Mengomunikasikan

- Guru meminta beberapa perwakilan siswa untuk mempresentasikan kesimpulan sementara yang didapatkan dan teman kelasnya yang lain menanggapi.
- Melalui diskusi kelas, guru bersama siswa membuat kesimpulan bersama mengenai penyajian distribusi frekuensi dalam bentuk grafik.

Kesimpulan yang diharapkan

Histogram adalah grafik yang menampilkan data menggunakan batang vertikal dengan tinggi tertentu yang menunjukkan frekuensi dari kelas yang diwakili.

Informasi yang dibutuhkan untuk menggambarkan histogram adalah batas kelas dan frekuensinya. Sumbu X merupakan kelas dari distribusi frekuensi sedangkan sumbu-y adalah frekuensinya.

Poligon frekuensi adalah grafik yang menampilkan data menggunakan garis yang menghubungkan titik-titik yang menunjukkan frekuensi yang diletakkan tepat di titik tengah kelas masing-masing. Untuk menggambarkan poligon frekuensi hampir sama dengan histogram. Frekuensi masing-masing kelas diwakili dengan tinggi titik pada titik tengah kelas tersebut. Langkah terakhir adalah menghubungkan titik-titik yang dihasilkan sebelumnya.

Ogive merupakan grafik yang menunjukkan frekuensi kumulatif dari kelas-kelas di distribusi frekuensi. Untuk mendapatkan ogive, langkah pertama adalah mendapatkan frekuensi kumulatif setiap kelas. Sumbu X berisikan batas-batas setiap kelas dan sumbu dan sumbu-y adalah frekuensi kumulatif. Plot setiap frekuensi kumulatif pada batas atas kelas, sehinga batas bawah kelas pertama mempunyai frekuensi 0. Langkah terakhir adalah menghubungkan titik-titik yang didapatkan sebelumnya.

Kegiatan Penutup

- Guru memberikan reviu materi sekaligus memberikan penguatan terhadap kegiatan belajar.

Pembahasan Soal Latihan 2.1

1. Berikut ini diberikan empat distribusi frekuensi. Setiap distribusi frekuensi yang diberikan terdapat kesalahan dalam penyusunannya. Sebutkan kesalahan masing distribusi frekuensi dan alasannya.

a.

Kelas	Frekuensi
27 – 32	1
33 – 38	0
39 – 44	6
45 – 49	4
50 – 55	2

b.

Kelas	Frekuensi
5 – 9	1
9 – 13	2
13 – 17	5
17 – 20	6
20 – 24	3

c.

Kelas	Frekuensi
123 – 127	3
128 – 132	7
138 – 142	2
143 – 147	19

d.

Kelas	Frekuensi
9 – 13	1
14 – 19	6
20 – 25	2
26 – 28	5
29 – 32	9

Alternatif Jawaban

a. Panjang kelas distribusi frekuensi (a) adalah 6 sedangkan panjang kelas yang keempat 45 – 49 adalah 5. Panjang setiap kelas dalam suatu distribusi frekuensi harus sama.

b. Kelas-kelas pada distribusi frekuensi (b) mempunyai batas yang saling beririsan. Hal ini dihindari agar tidak ada data yang masuk dalam dua kelas yang berbeda.

c. Terdapat kelas yang hilang pada distribusi frekuensi (c) yaitu kelas 133 – 137. Jika memang tidak ada data yang terletak pada selang ini maka sebaiknya kelas ini tetap dituliskan dengan frekuensi 0 (nol).

d. Kelas pada distribusi frekuensi (d) mempunyai panjang kelas yang berbeda-beda. Kelas yang pertama mempunyai panjang kelas 5 sedangkan kelas kedua mempunyai panjang kelas 6.

2. Distribusi frekuensi yang diberikan berikut mempresentasikan jumlah kendaraan roda empat terpilih dalam suatu kota yang menghabiskan bahan bakar bensin dalam jumlah tertentu (liter) setiap minggunya. Kolom kelas menyatakan jumlah bahan bakar bensin yang dihabiskan dalam 1 minggu sedangkan kolom frekuensi adalah banyaknya kendaraan roda empat.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
5 – 8	4,5 – 8,5	5
9 – 12	8,5 – 12,5	8
13 – 16	12,5 – 16,5	7
17 – 20	16,5 – 20,5	15
21 – 24	20,5 – 24,5	21
25 – 28	24,5 – 28,5	16

Jawablah pertanyaan berikut ini.

a. Berapa banyak kendaraan roda 4 yang menghabiskan bensin kurang dari 4,5 liter?

b. Berapa banyak kendaraan roda 4 yang menghabiskan bensin kurang dari 8,5 liter?

c. Lanjutkan untuk mecari banyak kendaraan yang kurang dari batas bawah kelas kemudian tuliskan pada tabel di bawah ini.

	Frekuensi Kumulatif
Kurang dari 4,5	
Kurang dari 8,5	
Kurang dari 12,5	
Kurang dari 16,5	
Kurang dari 20,5	
Kurang dari 24,5	
Kurang dari 28,5	

Catatan: Tabel di atas disebut distribusi frekuensi kumulatif

Alternatif Jawaban

a. Tidak ada kendaraan roda empat yang menghabiskan bensin kurang dari 4,5 liter dalam seminggu.

b. Terdapat 5 kendaraan roda empat yang menghabiskan bensin kurang dari 8,5 liter dalam seminggu.

c.

	Frekuensi Kumulatif
Kurang dari 4,5	0
Kurang dari 8,5	5
Kurang dari 12,5	13
Kurang dari 16,5	20
Kurang dari 20,5	35
Kurang dari 24,5	56
Kurang dari 28,5	72

3. Data berikut adalah data jumlah pengunjung perpustakaan SMA "NASIONAL" dalam 40 hari kerja berturut-turut.

50	65	60	71	55	82	76	70	80	64
78	95	88	90	81	75	78	78	70	68
85	67	74	86	59	63	84	66	75	87
94	96	72	78	65	81	85	95	88	96

Berdasarkan data tersebut, buatlah

a. Distribusi frekuensi dengan 7 kelas

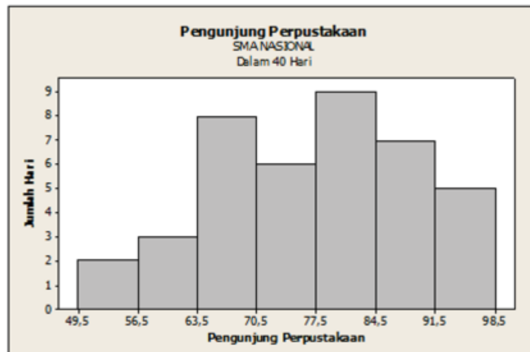
b. Histogram, poligon frekuensi, dan ogive untuk distribusi frekuensi poin (a).

Alternatif Jawaban

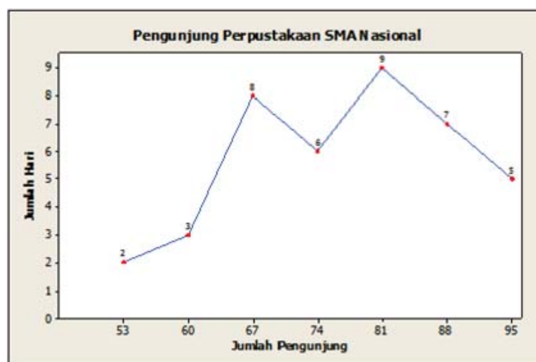
a. Distribusi frekuensi dengan 7 kelas.

Kelas	Frekuensi
50 – 56	2
57 – 63	3
64 – 70	8
71 – 77	6
78 – 84	9
85 – 91	7
92 – 98	5

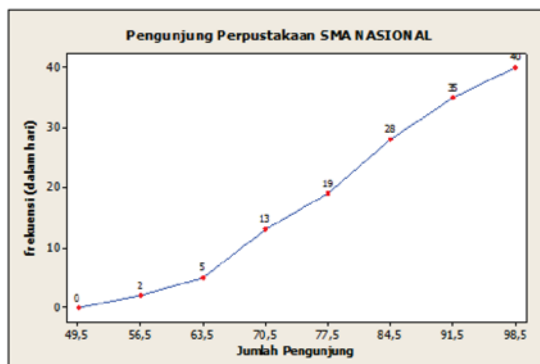
b. Histogram



Poligon Frekuensi



Ogive



4. Misalkan Anda adalah seorang pengusaha real estate di kota Masamba. Anda memperoleh daftar harga rumah yang sudah Anda jual dalam 6 bulan terakhir. Anda ingin mengorganisasi data yang Anda terima agar Anda dapat memberikan informasi yang akurat kepada calon pembeli. Gunakan data berikut ini untuk disajikan dalam histogram, poligon frekuensi, dan ogive. Data berikut dalam puluhan ribu rupiah.

142.000	127.000	99.600	89.000	93.000	99.500	162.000
73.800	135.000	119.000	67.900	156.300	104.500	108.650
123.000	91.000	205.000	110.000	156.300	104.000	133.900
179.000	112.000	147.000	321.550	87.900	88.400	180.000
159.400	205.300	144.400	163.000	96.000	81.000	131.000
114.000	119.600	93.000	123.000	187.000	96.000	80.000
231.000	189.500	177.600	83.400	77.000	132.300	166.000

a. Pertanyaan-pertanyaan apa yang yang dapat dijawab dengan mudah dengan melihat histogram dibandingkan dengan daftar harga yang diberikan di atas?
b. Pertanyaan berbeda apa yang dapat dijawab dengan lebih mudah dengan melihat poligon frekuensi dibandingkan dengan daftar harga tersebut?
c. Pertanyaan berbeda apa yang dapat dijawab dengan lebih mudah dengan melihat ogive dibandingkan dengan daftar harga tersebut?
d. Apakah ada data yang sangat besar atau sangat kecil dibandingkan dengan nilai lainnya?
e. Grafik mana yang menampilkan nilai ekstrim tersebut dengan lebih baik?

Alternatif Jawaban

a. Salah satu pertanyaan yang bisa diajukan adalah: Ada berapa rumah yang dijual dalam kisaran Rp1.000.000.000,00 - Rp 2.000.000.000,00?
b. Dengan melihat poligon frekuensi, pertanyaan "Berapa kisaran harga rumah yang paling banyak diminati oleh para pembeli?"
c. Dengan melihat ogive, pertanyaan yang bisa diajukan adalah "Berapa banyak rumah yang dijual dengan harga di bawah Rp1.500.000.000,00?"
d. Terdapat data dengan nilai paling kecil dibandingkan dengan data lainnya yaitu Rp679.000.000,00 dan data yang nilainya paling besar adalah Rp3.215.500.000,00.
e. Dengan melihat ketiga grafik, grafik poligon frekuensi menampilkan fitur nilai ekstrim (minimum dan maksimum) lebih baik dari kedua grafik lainnya.

2.2 Ukuran Pemusatan dan Penyebaran Data Berkelompok

Ukuran Pemusatan Data Berkelompok

Kegiatan Pendahuluan

- Guru memberikan motivasi tentang pentingnya mendeskripisikan data termasuk tentang rata-rata, median, atau modus.
- Guru memeriksa pengetahuan awal siswa tentang ukuran pemusatan data tunggal dengan memberikan data yang terdiri dari 12 datum yang ada di buku siswa dan meminta siswa untuk menentukan rata-rata, median, dan modus.
- Setelah mengingat kembali ukuran pemusatan data tunggal, guru menanyakan bagaimana jika rata-rata yang dihitung berasal dari distribusi frekuensi atau histogram.

Kegiatan Inti

- Guru mengajak siswa mengamati Contoh 2.11, Contoh 2.12, dan Contoh 2.13 yang diberikan di buku siswa mengenai ukuran pemusatan data berkelompok.
- Guru memberikan pengarahan untuk memperhatikan informasi yang diberikan pada ketiga contoh tersebut dan istilah-istilah yang digunakan.

- Guru meminta siswa untuk mengajukan/menuliskan pertanyaan-pertanyaan mengenai ukuran pemusatan data berkelompok.
- Guru dapat memberikan pengarahan kepada siswa untuk membandingkan dengan ukuran pemusatan data tunggal agar pertanyaan yang diajukan dapat membantu siswa lebih memahami ukuran pemusatan.
- Pertanyaan yang diharapkan muncul adalah:
  1) Bagaimanakah cara menentukan rata-rata, median, modus dari distribusi frekuensi?
  2) Bagaimanakah cara menentukan rata-rata, median, dan modus dari histogram?
  3) Apakah yang dimaksud dengan kelas median?
  4) Apakah yang dimaksud dengan kelas modus?

- Guru mengajak siswa untuk mengumpulkan informasi yang diberikan terutama pada Contoh 2.14 yang diberikan di Ayo, Menggali informasi seperti berikut ini.

18	24	19	28	30	19	35	40	23	21
26	34	27	40	38	30	21	24	22	18
32	17	18	21	26	33	35	20	28	27
26	34	31	37	40	17	18	18	20	33
16	20	18	36	35	24	39	19	31	31
26	28	19	35	31	31	28	21	23	26
20	24	24	29	30	30	26	29	28	20
19	28	30	32	38	40	25	25	31	21

- Guru dapat memberikan penekanan bahwa rata-rata untuk data berkelompok merupakan nilai pendekatan berbeda dengan rata-rata untuk data tunggal. Rata-rata untuk data tunggal dapat ditentukan secara eksak.
- Guru meminta siswa untuk menuliskan semua informasi tentang rata-rata data berkelompok yang dapat diperoleh pada kotak yang sudah disediakan di buku siswa.

Informasi yang diharapkan tentang rata-rata data berkelompok

Jika diberikan data mentah pada **Contoh 2.14** kita dapat menghitung rata-rata data tunggal seperti yang dipelajari di jenjang sebelumnya. Jumlah keseluruhan data tersebut adalah 2.154 dan banyak data adalah 80. Dengan demikian rata-rata data mentah tersebut adalah $\frac{2.154}{80} = 26{,}9$.

Jika jumlah data keseluruhan dengan pendekatan adalah 2.145 maka didapatkan rata-rata data berkelompok adalah 26,8. Perhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan antara rata-rata yang dihitung dari data mentah dan rata-rata dari data berkelompok. Hal ini diakibatkan jumlah keseluruhan data berkelompok didapatkan dari hasil pendekatan menggunakan titik tengah.

- Guru mengarahkan siswa untuk mencari kelas median dan kelas modus tanpa memberi tahu caranya. Siswa diminta menuliskan kelas median dan kelas modus dugaannya di kotak yang sudah disediakan.

Informasi yang diharapkan tentang median dan modus data berkelompok

Median merupakan nilai tengah dari data. Untuk data mentah, jika terdapat 80 data maka nilai tengah terletak diantara data ke-40 dan ke-41 setelah data diurutkan. Mirip dengan data mentah, nilai tengah data yang sudah dikelompokkan terletak di kelas tertentu yang disebut dengan kelas median. Karena jumlah frekuensi keseluruhan adalah 40 maka nilai tengah terletak di kelas yang memuat data ke-40 dan data ke-41.

Berdasarkan distribusi frekuensi pada **Contoh 2.14**, kelas median terletak pada kelas 26 – 30. Hal ini karena jumlah frekuensi dua kelas sebelumnya adalah 34 sedangkan jumlah frekuensi tiga kelas pertama adalah 55 sehingga data ke-40 dan data ke-41 terletak di kelas ketiga, yaitu 26 – 30.

Modus pada data mentah merupakan data yang paling banyak muncul. Hal ini hampir sama dengan data berkelompok, kelas modus merupakan kelas dengan frekuensi paling banyak. Dalam hal ini kelas modus pada distribusi frekuensi Contoh 2.14 adalah kelas 26 – 30.

- Dengan menggunakan informasi yang sudah dikumpulkan sebelumnya, siswa diminta untuk melengkapi tabel distribusi frekuensi dengan 7 kelas dan menentukan ukuran pemusatan sesuai dengan dugaannya.
- Jika data pada **Contoh 2.14** dibagi menjadi 7 kelas maka akan didapatkan distribusi frekuensi seperti berikut.

Kelas	Batas Kelas	Titik Tengah	Frekuensi	Titik Tengah · Frekuensi
16 – 19	15,5 – 19,5	17,5	14	245
20 – 23	19,5 – 23,5	21,5	13	279,5
24 – 27	23,5 – 27,5	25,5	15	382,5
28 – 31	27,5 – 31,5	29,5	19	560,5
32 – 35	31,5 – 35,5	33,5	10	335
36 – 39	35,5 –39,5	37,5	5	187,5
40 – 43	39,5 – 43,5	41,5	4	166

Alternatif Jawaban

Berdasarkan tabel yang sudah dilengkapi di atas, perkiraan jumlah data keseluruhan adalah 2.156. Jumlah frekuensi keseluruhan adalah 80. Dengan demikian rata-rata data berkelompok tersebut adalah $\frac{2.156}{80} = 26{,}95$. Nilai rata-rata distribusi frekuensi dengan 7 kelas ini lebih mendekati nilai rata-rata sebenarnya daripada distribusi frekuensi dengan 5 kelas.

Kelas median dari distribusi frekuensi ini terletak pada kelas 24 – 27, sedangkan kelas modusnya adalah 28 – 31.

Jelas hasil ini agak berbeda dengan distribusi frekuensi dengan 5 kelas. Walaupun kedua distribusi frekuensi ini berasal dari data mentah yang sama, ukuran pemusatan data berkelompok bisa berbeda karena penghitungan ukuran ini berdasarkan pada pendekatan. Walaupun demikian, hasil kedua distribusi frekuensi tetap akan mendekati hasil yang sebenarnya.

Kegiatan 2.2.1.1 Rata-Rata

- Guru meminta siswa untuk melengkapi tabel yang disediakan. Dengan mengisikan tabel dan menjawab pertanyaan yang ada di buku siswa, siswa diharapkan mampu merumuskan sendiri bagaimana mencari rata-rata untuk data berkelompok.

Kelas	Batas Kelas	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$x_i \cdot f_i$
30 – 34	29,5 – 34,5	32	5	160
35 – 39	34,5 – 39,5	37	10	370
40 – 44	39,5 – 44,5	42	7	294
45 – 49	44,5 – 49,5	47	20	940
50 – 54	49,5 – 54,5	52	8	416
Total			50	2.180

Alternatif Jawaban:

Rata-rata data tunggal didapatkan dengan membagi jumlah data dengan banyaknya data. Menggunakan prinsip yang sama, 43,6 juga didapatkan dari perkiraan jumlah data keseluruhan, yaitu jumlah perkalian titik tengah dengan frekuensinya, dibagi jumlah frekuensi. Jika x_i adalah titik tengah kelas ke-i dan f_i adalah frekuensi kelas ke-i, dan banyak kelas adalah k maka rata-rata data berkelompok dirumuskan sebagai berikut.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

Kegiatan 2.2.1.2 Median

- Guru meminta siswa untuk melengkapi tabel untuk median yang disediakan. Dengan melengkapi tabel dan menjawab pertanyaan yang menyertai siswa diharapkan mampu merumuskan sendiri bagaimana mencari median untuk data berkelompok.

Kelas	Batas Kelas	Batas Bawah (L_i)	Panjang Kelas (p)	Frekuensi (f_i)	F_i	$\frac{\frac{1}{2}n - F_1}{f_1}$	$L_i + p(\frac{\frac{1}{2}n - F_1}{f_1})$
30 – 34	29,5 – 34,5	29,5	5	5	0	5	54,5
35 – 39	34,5 – 39,5	34,5	5	10	5	2	44,5
40 – 44	39,5 – 44,5	39,5	5	7	15	1,43	46,64
45 – 49	44,5 – 49,5	44,5	5	20	22	0,15	45,25
50 – 54	49,5 – 54,5	49,5	5	8	42	–2,125	38,875

F_i : jumlah frekuensi kelas-kelas sebelum kelas ke-i.

n : banyak data

Alternatif Jawaban

Berdasarkan Contoh 2.11, median dari distribusi frekuensi ini adalah 45,25. Dengan melihat tabel di atas, nilai 45,25 muncul pada kelas keempat yaitu 45 – 49. Hal ini sesuai dengan informasi sebelumnya bahwa kelas 45 – 49 adalah kelas median, yaitu kelas di mana median terletak. Dengan melihat tabel di atas, cara menentukan median data berkelompok adalah

$$M_e = L_{me} + p\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_{me}}{f_{me}}\right)$$

dengan

M_e : Median
L_{me} : batas bawah kelas median
F_{me} : frekuensi kumulatif kelas-kelas sebelum kelas median
f_{me} : frekuensi kelas median
p : panjang kelas
n : jumlah frekuensi keseluruhan

Perhatikan bahwa frekuensi keseluruhan distribusi frekuensi ini adalah 50, sehingga median akan terletak di data urutan ke-25 dan ke-26. Kedua data ini terletak di kelas 45 – 49 yang selanjutnya disebut kelas median. Median dari data berkelompok merupakan nilai pendekatan dari median data tunggal yang sebenarnya.

Kegiatan 2.2.1.3 Modus

- Guru mengajak siswa melengkapi tabel untuk modus yang tersedia. Dengan melengkapi tabel dan menjawab pertanyaan setelahnya siswa diharapkan mampu merumuskan sendiri bagaimana mencari modus untuk data berkelompok. Berikut meruapakan tabel yang sudah dilengkapi.

Kelas	Batas Kelas	Batas Bawah (L_i)	Panjang Kelas (p)	Frekuensi (f_i)	d_1	d_2	$L_i + p\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)$
30 – 34	29,5 – 34,5	29,5	5	5	0	5	29,5
35 – 39	34,5 – 39,5	34,5	5	10	5	3	37,625
40 – 44	39,5 – 44,5	39,5	5	7	3	13	40,4375
45 – 49	44,5 – 49,5	44,5	5	20	13	12	47,1
50 – 54	49,5 – 54,5	49,5	5	8	12	0	54,5

Keterangan:
d_1 : selisih frekuensi kelas ke-i dengan kelas sebelumnya
d_2 : selisih frekuensi kelas ke-i dengan kelas berikutnya

Alternatif Jawaban

Modus distribusi frekuensi ini adalah 47,1 sesuai dengan yang diketahui sebelumnya. Perhatikan bahwa nilai 47,1 muncul pada kelas modus 45 – 49 yaitu kelas dengan frekuensi tertinggi. Dengan demikian, untuk menentukan modus data berkelompok, kelas modus harus ditentukan terlebih dahulu. Selanjutnya modus data berkelompok dapat ditentukan sebagai berikut.

$$M_o = L_{mo} + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

dengan

M_o : modus data berkelompok

p : panjang kelas

d_1 : selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya

d_2 : selisih frekuensi kelas modus dengan kelas berikutnya

- Guru meminta siswa untuk menentukan ukuran pemusatan distribusi frekuensi dan histogram yang ada pada **Contoh 2.12** dan **Contoh 2.13** menggunakan dugaan rumus yang siswa peroleh. Kemudian siswa mencocokkan hasilnya dengan ukuran pemusatan pada contoh di buku siswa.

Mengomunikasikan

- Guru meminta/menunjuk beberapa perwakilan siswa untuk mempresentasikan bagaimana mendapatkan ukuran pemusatan data berkelompok hasil dugaannya di depan kelas. Siswa lainnya diharapkan menanggapi sehingga nantinya didapatkan kesimpulan yang disepakati bersama dalam kelas.

Kesimpulan yang diharapkan

Pada prinsipnya, ukuran pemusatan data berkelompok sama dengan ukuran pemusatan data tunggal. Perbedaannya, ukuran pemusatan data dihitung menggunakan data aslinya sedangkan ukuran pemusatan data berkelompok dihitung menggunakan pendekatan terhadap nilai yang sebenarnya.

Berikut merupakan rumus untuk menentukan ukuran pemusatan untuk data berkelompok, khususnya data yang disajikan dalam distribusi frekuensi dan histogram.

Rata-rata:

Rata-rata:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

Median:

$$M_e = L_{me} + p\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_{me}}{f_{me}}\right)$$

Modus:

$$M_o = L_{mo} + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Kegiatan Penutup

- Guru memberikan klarifikasi atau penguatan materi terhadap ukuran pemusatan data berkelompok yang diperoleh siswa.

2.2.2 Ukuran Penyebaran Data Berkelompok

Kegiatan Pendahuluan

- Guru memberikan motivasi tentang pentingnya mendeskripsikan data selain dengan ukuran pemusatan data, yaitu dengan ukuran penyebaran data.
- Guru memeriksa pengetahuan awal siswa tentang ukuran penyebaran data dan mengingatkan siswa apa saja yang termasuk ukuran penyebaran data.
- Guru mengajak siswa untuk mengingat kembali ukuran penyebaran data tunggal kemudian guru menanyakan bagaimana jika ukuran penyebaran yang akan ditetukan berasal dari distribusi frekuensi atau histogram.

Kegiatan Inti

- Guru mengajak siswa mengamati **Contoh 2.15**, **Contoh 2.16**, dan **Contoh 2.17** yaitu informasi mengenai ukuran penyebaran data yang didapatkan dari distribusi frekuensi dan histogram.
- Guru mengarahkan siswa dalam pengamatan contoh untuk mendapatkan informasi sebanyak mungkin yang disediakan dalam contoh.

- Guru meminta siswa untuk menuliskan/mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang berhubungan dengan informasi yang disediakan.
- Guru dapat memancing siswa untuk mengajukan pertanyaan tentang ukuran penyebaran data berkelompok dengan membandingkan ukuran penyebaran pada data tunggal.
- Guru meminta perwakilan siswa untuk menuliskan pertanyaan-pertanyaan yang didapatkan di papan tulis atau LCD kemudian teman lainnya menanggapi atau menambahi jika ada yang belum tertuliskan di papan tulis.
- Pertanyaan yang diharapkan muncul adalah:
  1) Apa saja yang dimaksud dengan ukuran penyebaran data?
  2) Bagaimanakah cara menentukan simpangan rata-rata dari distribusi frekuensi atau histogram?
  3) Bagaimanakah cara menentukan simpangan baku dari distribusi frekuensi atau histogram?
  4) Bagaimanakah cara menentukan ragam dari distribusi frekuensi atau histogram?

- Guru mengajak siswa untuk mengumpulkan informasi yang diberikan terutama pada Contoh 2.18 yang diberikan di Ayo, Mengumpulkan informasi dan Menalar.
- Guru meminta siswa untuk menghitung rata-rata dari distribusi frekuensi pada contoh tersebut di dalam kotak yang disediakan.

Alternatif jawaban

Kelas	Batas Kelas	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$x_i \cdot f_i$
66 – 72	65,5 – 72,5	69	6	414
73 – 79	72,5 – 79,5	76	18	1.368
80 – 86	79,5 – 86,5	83	39	3.237
87 – 93	86,5 – 93,5	90	28	2.520
94 – 100	93,5 – 100,5	97	9	873

Rata-rata distribusi frekuensi tersebut adalah

$$\bar{x} - = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{8.412}{100} = 84,12$$

Rata-rata nilai ujian akhir 100 mahasiswa jurusan matematika di suatu universitas adalah 84,12.

- Guru mengajak siswa untuk menambahkan kolom pada distribusi frekuensi yang berisikan selisih titik tengah tiap kelas dengan rata-rata.
- Siswa diharapkan mendapatkan informasi lebih mengenai simpangan rata-rata setelah menambah kolom tersebut.

Alternatif Jawaban

Kelas	Batas Kelas	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$\lvert x_i . \bar{x} \rvert$
66 – 72	65,5 – 72,5	69	6	15,12
73 – 79	72,5 – 79,5	76	18	8,12
80 – 86	79,5 – 86,5	83	39	1,12
87 – 93	86,5 – 93,5	90	28	5,88
94 – 100	93,5 – 100,5	97	9	12,88

Berdasarkan besarnya selisih pada kolom terakhir, selisih dengan rata-rata menyatakan seberapa jauh atau menyinpang data pada kelas tersebut dengan rata-rata. Sebagai contoh, setiap data pada kelas pertama diasumsikan mempunyai selisih dengan rata-rata sebesar 15,12. Jika frekuensi pada kelas pertama adalah 6, maka total selisih data pada kelas pertama dengan rata-rata adalah sebesar 15,12 × 6 = 90,72. Dengan cara yang sama kita dapat menghitung total selisih data dengan rata-rata tiap kelas.

- Guru mengajak siswa mengamati simpangan baku dan ragam yang diberikan di **Contoh 2.15**, **Contoh 2.16**, dan **Contoh 2.17**. Siswa diminta untuk menyelidiki hubungan antara ragam dan simpangan baku suatu data bekelompok.
- Siswa juga diminta untuk menuliskan cara menentukan simpangan baku dan ragam untuk data tunggal.

Alternatif Jawaban

Pada Contoh 2.15, ragam distribusi frekuensinya adalah 212,3 sedangkan simpangan bakunya adalah 14,6.

Pada Contoh 2.16, ragam distribusi frekuensinya adalah 25,7 sedangkan simpangan bakunya adalah 5,1.

Pada Contoh 2.17, ragam histogram adalah 5,09 sedangkan simpangan bakunya adalah 2,26.

Sifat yang sama dari ketiga contoh tersebut adalah ragam merupakan kuadrat dari simpangan baku. Sebaliknya kita bisa katakan simpangan baku merupakan akar dari ragam. Sehingga menentukan salah satu ukuran penyebaran dapat menghasilkan ukuran penyebaran lainnya.

Ragam untuk data sampel dan merupakan data tunggal ditentukan sebagai berikut.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x - \overline{x})^2}{n}$$

dengan

$\overline{x}$: rata-rata data sampel

s^2 : ragam

n : ukuran/banyak data

s : simpangan baku

x : data mentah

Kegiatan 2.2.2.1 Simpangan Rata-rata

- Guru meminta siswa untuk melengkapi tabel pada kegiatan 3.3.1 simpangan rata-rata yang ada di buku siswa.
- Siswa juga diminta untuk membuat tabel yang sama untuk distribusi frekuensi pada Contoh 2.16 dan Contoh 2.17 untuk memudahkan siswa membuat dugaan rumus simpangan rata-rata untuk data berkelompok. Siswa dapat membuat dugaan rumus tersebut dengan mengamati tabel yang sudah dilengkapi dengan informasi simpangan rata-rata yang diberikan di Contoh 2.16 dan Contoh 2.17.
- Guru meminta siswa untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan yang menyertai tabel tersebut. Selanjutya siswa diminta untuk membuat dugaan rumus simpangan rata-rata untuk data berkelompok.

Kelas	Frekuensi (f_i)	Titik Tengah (x_i)	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot \lvert x_1 - \bar{x}\rvert$
10 – 20	2	15	26,87	30	55,73
21 – 31	8	26	16,87	208	134,93
32 – 42	15	37	5,87	555	88
43 – 53	7	48	5,13	336	35,93
54 – 64	10	59	16,13	590	161,33
65 – 75	3	70	27,13	210	81,4
Total	45			1.929	557,33

Alternatif Jawaban

Sebelum mendapatkan kolom keempat, rata-rata dari distribusi frekuensi tersebut harus dihitung terlebih dahulu. Dengan menggunakan rumus yang diketahui sebelumnya, rata-rata distribusi frekuensi tersebut adalah 42,87, yaitu didapatkan dari total kolom kelima dibagi dengan total kolom frekuensi. Jika total kolom kelima dibagi dengan total frekuensi maka hasilnya adalah $\frac{557,33}{45}$ =12,385. Perhatikan bahwa hasil ini sesuai dengan informasi simpangan rata-rata yang diberikan pada **Contoh 2.15**. Dengan demikian rumus simpangan rata-rata untuk data berkelompok adalah

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot \lvert x_1 - \bar{x}\rvert}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

dengan

SR : Simpangan rata-rata

f_i : frekuensi kelas ke-i

$\bar{x}$: rata-rata data berkelompok

x_i : titik tengah kelas ke-i

Kegiatan 2.2.2.2 Simpangan Baku dan Ragam

- Guru mengajak siswa untuk melengkapi tabel pada kegiatan 3.3.2 Simpangan Baku dan Ragam di buku siswa untuk mengetahui lebih lanjut rumus simpangan baku dan ragam data berkelompok.
- Berdasarkan tabel yang sudah dilengkapi, siswa diminta menghitung beberapa rumus yang disediakan dan siswa diminta untuk memilih manakah rumus ragam yang sesuai dengan Contoh 2.15. Jika rumus ragam sudah dapat diduga, maka rumus simpangan baku dapat diperoleh dari rumus ragam tersebut.

- Siswa juga diminta untuk membuat tabel yang sama untuk Contoh 2.16 dan Contoh 2.17 dan menghitung ragam dan simpangan baku masing-masing data berkelompok. Hasil yang didapatkan dicocokkan dengan simpangan baku yang disediakan pada kedua contoh tersebut.

Kelas	Frekuensi (f_i)	Titik Tengah (x_i)	$f_i \cdot x_i$	x_i^2	$f_i \cdot x_i^2$
10 – 20	2	15	30	225	450
21 – 31	8	26	208	676	5.408
32 – 42	15	37	555	1.369	20.535
43 – 53	7	48	336	2.304	16.128
54 – 64	10	59	590	3.481	34.810
65 – 75	3	70	210	4.900	14.700
Total	45		1.929		92.031

Alternatif Jawaban

Berdasarkan tabel di atas, kita dapat memperoleh

1. $\dfrac{\sum f_i x_i - \sum f_i x_i^2}{n^2} = -44,4948$
2. $\dfrac{\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n^2} = -1.792,1$
3. $\dfrac{\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)} = -1.832,83$
4. $\dfrac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)} = 212,3$
5. $\dfrac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n^2} = 207,5822$

Berdasarkan informasi pada **Contoh 2.15**, ragam yang diberikan pada **Contoh 2.15** adalah 212,3 sehingga rumus ragam untuk data berkelompok adalah

$$s^2 = \frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)}$$

Akibatnya simpangan baku data berkelompok adalah

$$s = \sqrt{\frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)}}$$

dengan

s^2 : ragam
s : simpangan baku
n : jumlah frekuensi keseluruhan

Mengomunikasikan

- Guru meminta beberapa siswa/kelompok untuk mempresentasikan bagaimana menentukan ukuran penyebaran data berkelompok sesuai dengan hasil dugaannya. Siswa atau kelompok lainnya memberikan tanggapan dan komentar sehingga terjadi diskusi kelas dan mendapatkan kesimpulan akhir.

Kesimpulan yang diharapkan

Ukuran penyebaran data yang meliputi simpangan rata-rata, simpangan baku, dan ragam mengukur seberapa jauh data menyebar terhadap pusat data (rata-rata). Simpangan rata-rata merupakan ukuran penyimpangan data terhadapat rata-rata hitung. Simpangn rata-rata data berkelompok dapat ditentukan menggunakan rumus berikut

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot |x_1 - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} .$$

Ragam merupakan rata-rata kuadrat jarak setiap data terhadap rata-rata. Jika simpangan rata-rata tidak memperhatikan tanda-tanda penyimpangan yaitu tanda negatif atau positif. Ragam data berkelompok ditentukan oleh

$$s^2 = \frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)}$$

Simpangan baku merupakan akar dari ragam. Ragam berasal dari kuadrat dari selisih data dengan rata-rata sehingga satuan ragam berbeda dengan satuan data. Hal ini yang mengakibatkan simpangan baku diperlukan agar satuan simpangan samadengan satuan data. Simpangan baku data berkelompok ditentukan oleh rumus

$$s = \sqrt{\frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)}}$$

Kegiatan Penutup

- Guru memberikan klarifikasi atau penguatan materi terhadap ukuran penyebaran data berkelompok yang diperoleh siswa.

Pembahasan Soal Latihan 2.2

1. Berikut merupakan data jumlah protein yang terkandung dalam beberapa macam makanan cepat saji yang terpilih.

23	30	20	27	44	26	35	20	29	29
25	15	18	27	19	22	12	26	34	15
27	35	26	43	35	14	24	12	23	31
40	35	38	57	22	42	24	21	27	33

   a. Hitunglah rata-rata, median, dan modus dari data tersebut.
   b. Buatlah distribusi frekuensi data tersebut dengan 5 kelas.
   c. Hitung rata-rata, median, dan modus dari data yang sudah dikelompokkan pada poin (b)
   d. Bandingkan ukuran pemusatan pada poin (a) dan (c). Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai hasil tersebut?

   Alternatif Jawaban

   a. Rata-rata data tunggal

   $$\bar{x}_t = \frac{Jumlah\ data}{n} = \frac{1.105}{40} = 27{,}625$$

   dengan $\bar{x}_t$ adalah rata-rata data tunggal.

   Median data tunggal = 26,5 dan modusnya adalah 27.

   b. Distribusi frekuensi dengan 5 kelas

Kelas	Frekuensi
10 – 19	7
20 – 29	19
30 – 39	9
40 – 49	4
50 – 59	1

   c. Menggunakan distribusi frekuensi di atas dapat ditentukan:

   Rata-rata

   $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=2}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{1.110}{40} = 27{,}75$$

Median

$$M_e = L_{me} + p\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_{me}}{f_{me}}\right) = 19{,}5 + 10(\frac{20-7}{19})$$

Modus

$$M_o = L_{mo} + p(\frac{d_1}{d_1 + d_2}) = 19{,}5 + 10(\frac{12}{12+10}) = 24{,}95$$

d. Ukuran pemusatan yang dihitung dari distribusi frekuensi hasilnya berbeda dengan ukuran pemusatan yang dihitung dari data mentah atau data yang belum dikelompokkan. Walaupun hasilnya berbeda, tetapi ukuran pemusatan data berkelompok mendekati ukuran pemusatan data tunggal.

2. Berikut merupakan distribusi frekuensi persentase penduduk usia di bawah 25 tahun yang menyelesaikan studi sarjananya selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia. Tentukan ukuran pemusatan data berkelompok tersebut.

Persentase	Frekuensi
15,2 – 19,6	3
19,7 – 24,1	15
24,2 – 28,6	19
28,7 – 33,1	6
33,2 – 37,6	7
37,7 – 42,1	0
42,2 – 46,6	1

Alternatif Jawaban

Rata-rata

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=2}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{1.359{,}9}{51} = 26{,}66$$

Rata-rata persentase mahasiswa yang menyelesaikan studi selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia adalah sebesar 26,66%.

Median

$$M_e = L_{me} + p\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_{me}}{f_{me}}\right) = 24{,}15 + 4{,}5(\frac{25{,}5 - 18}{19}) = 25{,}93$$

Nilai tengah persentase mahasiswa yang menyelesaikan studi selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia adalah sebesar 25,93%.

Modus

$M_o = L_{mo} + p(\frac{d_1}{d_1 + d_2}) = 24{,}15 + 4{,}5(\frac{4}{4 + 13}) = 25{,}21$

Kebanyakan persentase mahasiswa yang menyelesaikan studi selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia adalah sebesar 25,21%.

3. Jelaskan ukuran pemusatan apa yang digunakan (rata-rata, median, modus) untuk situasi di bawah ini.
   a. Setengah dari jumlah pekerja di suatu pabrik dapat memperoleh lebih dari Rp20.000,00 per jam dan setengahnya yang lain memperoleh kurang dari Rp20.000,00 per jam.
   b. Rata-rata jumlah anak dalam suatu keluarga di suatu kompleks perumahan adalah 1,8.
   c. Sebagian besar orang lebih memilih mobil warna hitam dibandingkan dengan warna-warna lainnya.
   d. Ketakutan yang paling umum terjadi saat ini adalah ketakutan berbicara di depan umum.
   e. Rata-rata usia dosen perguruan tinggi adalah 42,3 tahun.

Alternatif Jawaban

a. Median (nilai tengah)
b. Rata-rata
c. Modus
d. Modus
e. Rata-rata

4. Delapan puluh baterai merk tertentu dipilih secara acak untuk dievaluasi daya hidup baterai dalam jam. Distribusi frekuensi yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Batas Kelas	Frekuensi
62,5 – 73,5	5
73,5 – 84,5	14
84,5 – 95,5	18
95,5 – 106,5	25
106,5 – 117,5	12
117,5 – 128,5	6

   a. Tentukan simpangan rata-rata, simpangan baku dan ragam.
   b. Dapatkah disimpulkan bahwa daya hidup baterai merk tertentu tersebut konsisten? Jelaskan.

Alternatif Jawaban

a. Simpangan rata-rata

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot |x_1 - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{965,525}{80} = 12,07.$$

Ragam

$$s^2 = \frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)} = 211,1948.$$

Simpangan baku

$$s = \sqrt{\frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)}} = 14,53.$$

b. Daya hidup baterai merk tertentu tersebut tidak konsisten karena simpangan baku maupun simpangan rata-ratanya terlalu besar.

5. Distribusi frekuensi di bawah ini merupakan persentase siswa sekolah dasar kelas 2 yang mempunyai kemampuan baca dan kemampuan matematika di atas batas yang sudah ditentukan di 50 kota besar di Indonesia. Tentukan ukuran penyebaran dari kedua disribusi frekuensi berikut dan bandingkan hasilnya.

Persentase	Frekuensi Kemampuan Baca	Frekuensi Kemampuan Matematika
17,5 – 22,5	7	5
22,5 – 27,5	6	9
27,5 – 32,5	14	11
32,5 – 37,5	19	16
37,5 – 42,5	3	8
42,5 – 47,5	1	1

Alternatif Jawaban

Kemampuan Baca

Simpangan rata-rata

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot |x_1 - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{243,2}{50} = 4,864.$$

Ragam

$$s^2 = \frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)} = 37,1.$$

Simpangan baku

$$s = \sqrt{\frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)}} = 6,09.$$

Kemampuan Matematika

Simpangan rata-rata

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot |x_1 - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{270}{50} = 5,4.$$

Ragam

$$s^2 = \frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)} = 41,27.$$

Simpangan baku

$$s = \sqrt{\frac{n\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2}{n(n-1)}} = 6,42.$$

Persentase siswa kelas 2 yang mempunyai kemampuan matematika di atas batas yang sudah ditentukan lebih menyebar daripada persentase siswa dengan kempuan baca di atas batas yang sudah ditentukan. Hal ini dapat dilihat dari ragam, simpangan rata-rata dan simpangan baku persentase kemampuan matematika lebih besar daripada persentase kemampuan baca.

Pembahasan Uji Kompetensi 3

1. Berikut merupakan daftar berat badan 50 pemain top NBA dalam pound. Buat distribusi frekuensi dengan 8 kelas. Analisa hasil distribusi frekuensi mengenai nilai-nilai ekstrim, kelas terbanyak, kelas dengan frekuensi paling sedikit, dan sebagainya. (1 pound = 0,453)

240	210	220	260	250	195	230	270	325	225
165	295	205	230	250	210	220	210	230	202
250	265	230	210	240	245	225	180	175	215
215	235	245	250	215	210	195	240	240	225
260	210	190	260	230	190	210	230	185	260

Alternatif Jawaban

Nilai terendah adalah 165 dan nilai tertinggi adalah 325, sehingga jangkauannya adalah 160. Jika ingin dibagi menjadi 8 kelas maka panjang kelas adalah 20. Perhatikan bahwa banyak kelas habis membagi jangkauan (tanpa sisa) maka dalam hal ini kita perlu menambah 1 kelas tambahan untuk mengakomodasi semua data yang diberikan.

Distribusi frekuensi yang dihasilkan adalah (titik awal kelas pertama boleh berbeda antara satu siswa dengan lainnya).

Kelas	Frekuensi
165 – 184	3
185 – 204	6
205 – 224	13
225 – 244	14
245 – 264	10
265 – 284	2
285 – 304	1
305 – 324	0
325 – 344	1

Pemain NBA terberat mempunyai berat badan 325 pound sedangkan pemain paling ringan mempunyai berat badan 165 pound. Berdasarkan distribusi frekuensi di atas kelas dengan frekuensi terbanyak berisikan pemain NBA dengan berat badan di antara 225 – 244 pound. Di lain pihak tidak ada pemain NBA yang berat badannya di antara 305 – 324 pound. Terdapat 1 pemain NBA yang mempunyai berat badan jauh lebih besar daripada yang lainnya yaitu dengan berat badan 325 pound.

2. Buat distribusi frekuensi dengan 7 kelas untuk data nilai tes TOEFL siswa kelas bahasa suatu sekolah yang diberikan berikut ini. Kemudian jawab pertanyaan-pertanyaan berikutnya.

350	540	495	455	400	520	513	485
460	505	375	380	550	475	450	390
495	470	510	465	398	497	450	440
395	465	470	440	520	492	524	380
390	425	475	435	550	545	445	458

a. Untuk kelas dengan frekuensi terbanyak, tentukan persentase frekuensinya terhadap jumlah keseluruhan siswa.

b. Untuk kelas dengan frekuensi paling sedikit, tentukan persentase frekuensinya terhadap jumlah keseluruhan siswa.

c. Lanjutkan langkah ini untuk kelas lainnya. Buat kolom tambahan di sebelah kanan berisikan persentase setiap kelasnya.

d. Ceritakan hasil distribusi frekuensi yang diperoleh

Distribusi frekuensi yang Anda dapatkan disebut dengan distribusi frekuensi relatif.

Alternatif Jawaban

Distribusi frekuensi yang didapatkan adalah (titik awal kelas pertama boleh berbeda asalkan dekat dan kurang dari nilai data terendah)

Kelas	Frekuensi
350 – 378	2
379 – 407	7
408 – 436	2
437 – 465	10
466 – 494	6
495 – 523	8
524 – 552	5

a. Kelas 437 – 465 mempunyai frekuensi terbanyak yaitu 10 sehingga persentasenya adalah 25%.

b. Kelas dengan frekuensi paling sedikit adalah kelas 350 – 378 dan 408 – 436 dengan persentase masing-masing 5%.

c.

Kelas	Frekuensi	Persentase
350 – 378	2	5%
379 – 407	7	17,5%
408 – 436	2	5%
437 – 465	10	25%
466 – 494	6	15%
495 – 523	8	20%
524 – 552	5	12,5%

d. Distribusi frekuensi poin (c) menambahkan persentase frekuensi masing-masing kelas terhadap banyak data.

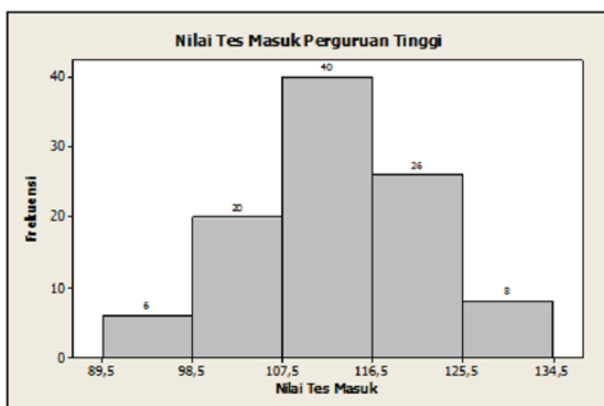
3. Seratus pendaftar seleksi masuk perguruan tinggi di suatu universitas dipilih secara acak sehingga didapatkan distribusi frekuensi nilai tes berikut ini. Buatlah histogram, poligon frekuensi dan ogive untuk distribusi frekuensi ini.

Kelas	Frekuensi
90 – 98	6
99 – 107	20
108 – 116	40
117 – 125	26
126 – 134	8

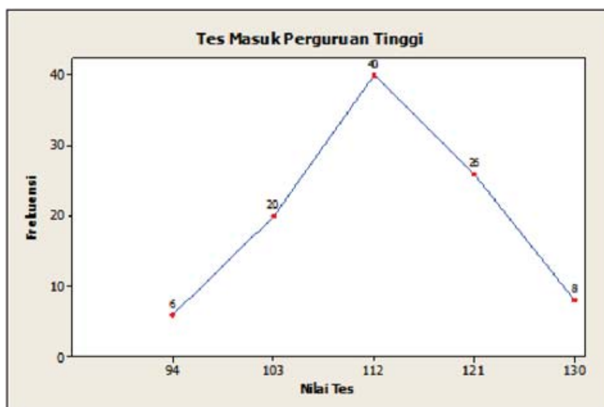
Pendaftar yang nilainya di atas 107 tidak perlu ikut dalam program matrikulasi. Dalam kelompok ini ada berapa pendaftar yang tidak perlu ikut dalam program matrikulasi?

Alternatif Jawaban

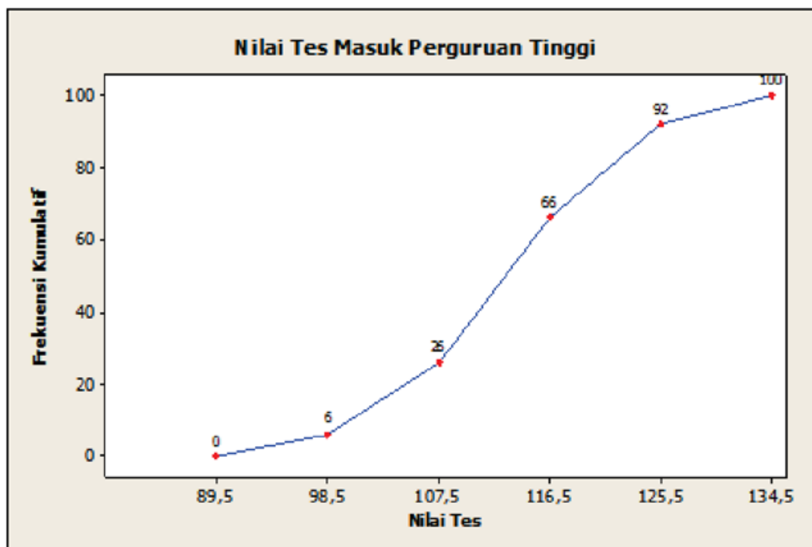
Histogram



Poligon Frekuensi



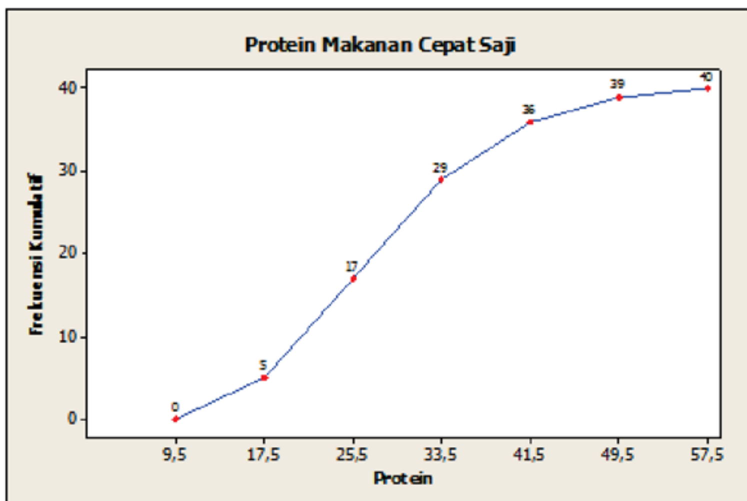
Ogive



Dengan melihat ogive dapat diketahui bahwa jumlah peserta tes yang tidak lebih dari 107 dan harus mengikuti matrikulasi sebanyak 26 peserta.

4. Beberapa kota besar di Indonesia yang terpilih diuji kualitas udaranya dari polusi. Berikut merupakan data jumlah hari di mana kota-kota tersebut dideteksi mempunyai kualitas udara yang buruk pada tahun 2010 dan 2015. Buatlah distribusi frekuensi dan histogram untuk masing-masing tahun dan bandingkan hasilnya.

2010						2015					
43	76	51	14	0	10	10	11	14	20	15	6
20	0	5	17	67	25	17	0	5	19	127	4
38	0	56	8	0	9	31	5	88	1	1	16
14	5	37	14	95	20	14	19	20	9	138	22
23	12	33	0	3	45	13	10	20	20	20	12



Distribusi Frekuensi Kualitas Udara Buruk 2010 dan 2015

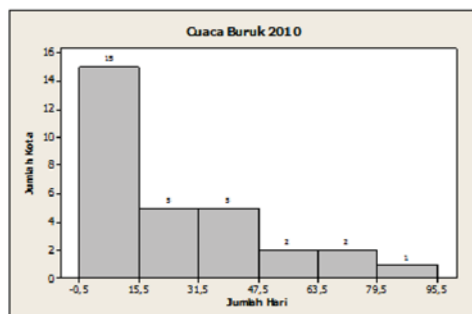
2010

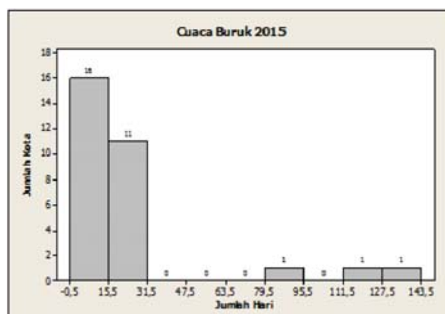
Kelas	Frekuensi
0 – 15	15
16 – 31	5
32 – 47	5
48 – 63	2
64 – 79	2
80 – 95	1

2015

Kelas	Frekuensi
0 – 15	16
16 – 31	11
32 – 47	0
48 – 63	0
64 – 79	0
80 – 95	1
96 – 111	0
112 – 127	1
128 – 143	1

Histogram





Banyak kota yang mempunyai cuaca buruk paling sedikit dalam satu tahun di tahun 2010 hampir sama dengan banyak kota di tahun 2015. Di tahun 2010 terdapat satu kota yang mengalami cuaca buruk paling banyak antara 80 – 95 hari, tetapi di tahun 2015 terdapat satu kota yang mengalami cuaca buruk paling parah antara 128 – 143 hari dalam setahun.

5. Jumlah protein dalam beberapa macam makanan cepat saji diberikan di bawah ini. Buatlah distribusi frekuensi dengan 6 kelas kemudian sajikan dalam histogram, poligon frekuensi, dan ogive. Deskripsikan histogram yang diperoleh.

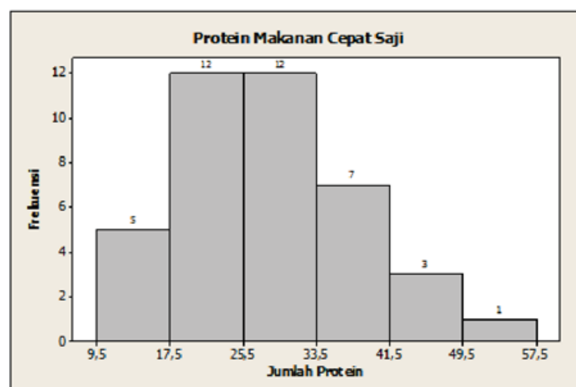
23	30	20	27	44	26	35	20	29	29
25	15	18	27	19	22	12	26	34	15
27	35	26	43	35	14	24	12	23	31
40	35	38	57	22	42	24	21	27	33

Alternatif Jawaban

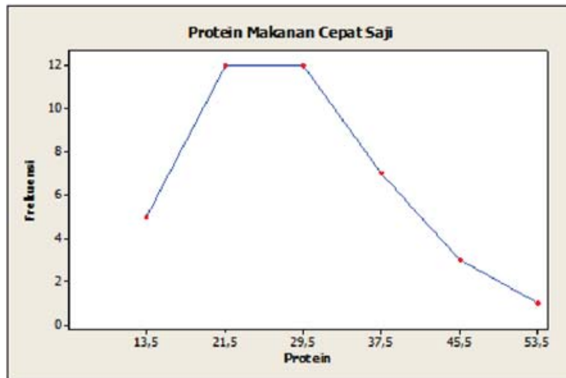
Distribusi frekuensi dengan 6 kelas yang didapatkan adalah

Kelas	Frekuensi
10 – 17	5
18 – 25	12
26 – 33	12
34 – 41	7
42 – 49	3
50 – 57	1

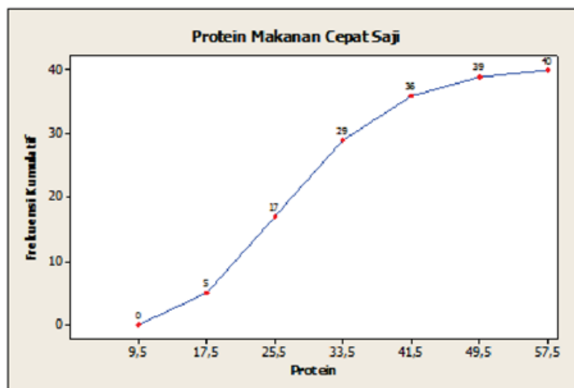
Histogram



Poligon Frekuensi



Ogive



6. Diberikan distribusi frekuensi untuk jumlah komisi (dalam puluhan ribu) yang diterima 100 salesman yang dipekerjakan di beberapa cabang perusahaan besar. Tentukan rata-rata, median, dan modus untuk distribusi frekuensi ini.

Kelas	Frekuensi
150 – 158	5
159 – 167	16
168 – 176	20
177 – 185	21
186 – 194	20
195 – 203	15
204 – 212	3

Alternatif Jawaban

Rata-rata

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=2}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{18.028}{100} = 180,28$$

Rata-rata salesmen mendapatkan komisi sebesar Rp1.802.800,00.

Median

$$M_e = L_{me} + p\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_{me}}{f_{me}}\right) = 176,5 + 9(\frac{50-41}{21}) = 180,357$$

Komisi tingkat menengah yang diterima salesmen adalah Rp1.803.570,00.

Modus

$$M_o = L_{mo} + p(\frac{d_1}{d_1 + d_2}) = 176,5 + 9(\frac{1}{1+1}) = 181$$

Sebagian besar salesmen mendapatkan komisi sebesar Rp1.810.000,00.

7. Pengelola restoran cepat saji di suatu kota besar menyatakan bahwa rata-rata gaji karyawannya adalah Rp18.000,00 per jam. Seorang karyawannya menyatakan bahwa kebanyakan karyawan di restoran tersebut menerima gaji minimal. Jika kedua orang tersebut jujur atas pernyataannya, jelaskan bagaimana ini bisa terjadi.

Alternatif Jawaban

Ukuran pemusatan data seperti rata-rata, median, dan modus mempunyai nilai yang hampir sama. Sehingga jika rata-rata karyawan mempunyai gaji Rp18.000,00 per jam sekaligus kebanyakan (modus) karyawan mempunyai gaji minimal maka dapat disimpulkan bahwa gaji Rp18.000,00 per jam merupakan gaji yang minimal. Dengan kata lain, kebanyakan karyawan mendapatkan gaji minimal dengan besaran sekitar Rp18.000,00.

8. Distribusi frekuensi di bawah ini menyajikan persentase penduduk usia di bawah 25 tahun yang menyelesaikan studi sarjana tepat 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia. Tentukan ukuran penyebaran dari distribusi frekuensi tersebut.

Persentase	Frekuensi
15,2 – 19,6	3
19,7 – 24,1	15
24,2 – 28,6	19
28,7 – 33,1	6
33,2 – 37,6	7
37,7 – 42,1	0
42,2 – 46,6	1

Alternatif Jawaban

Simpangan rata-rata

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot |x_1 - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{965,525}{80} = 12,07.$$

Ragam

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} f_i x_i)^2}{n(n-1)} = 211,1948.$$

Simpangan baku

$$s = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} f_i x_i)^2}{n(n-1)}} = 14,53.$$

9. Dua puluh pelari dipilih secara acak untuk dilihat jumlah kilometer pelari tersebut lari dalam seminggu. Berikut merupakan distribusi frekuensi yang dihasilkan.

Batas Kelas	Frekuensi
5,5 – 10,5	1
10,5 – 15,5	2
15,5 – 20,5	3
20,5 – 25,5	5
25,5 – 30,5	4
30,5 – 35,5	3
35,5 – 40,5	2

a. Tentukan ukuran pemusatan distribusi frekuensi tersebut.

b. Tentukan ukuran penyebarannya.

c. Deskripsikan perilaku data tersebut terhadap rata-rata berdasarkan ukuran penyebarannya.

Alternatif Jawaban

a. Rata-rata

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=2}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{490}{20} = 24,5.$$

Rata-rata pelari lari sejauh 24,5 kilometer dalam seminggu.

Median

$$M_e = L_{me} + p\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_{me}}{f_{me}}\right) = 20,5 + 5\left(\frac{10-6}{5}\right) = 24,5$$

Nilai tengah jarak tempuh pelari dalam satu minggu adalah sejauh 24,5 kilometer.

Modus

$$M_o = L_{mo} + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 20,5 + 5\left(\frac{2}{2+1}\right) = 23,83$$

Kebanyakan pelari dapat lari dengan menenpuh jarak total 23,83 kilometer dalam seminggu.

b. Simpangan rata-rata

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot |x_1 - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{133}{20} = 6,65.$$

Ragam

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} f_i x_i)^2}{n(n-1)} = 68,68.$$

Simpangan baku

$$s = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 \quad (\sum_{i=1}^{k} f_i x_i)^2}{n(n \quad 1)}} = 8,29.$$

d. Dengan simpangan baku dan simpangan rata-rata yang besarnya hampir sama dan cukup besar maka dapat disimpulkan bahwa datanya menyebar (tidak cukup dekat dengan rata-ratanya).

10. Berikut merupakan distribusi frekuensi kumulatif data suhu udara tertinggi (dalam derajat Fahrenheit) yang tercatat di 50 kota besar di Indonesia. Tentukan simpangan rata-rata, simpangan baku, dan ragam.

	Frekuensi Kumulatif
Kurang dari 99,5	0
Kurang dari 104,5	2
Kurang dari 109,5	10
Kurang dari 114,5	28
Kurang dari 119,5	41
Kurang dari 124,5	48
Kurang dari 129,5	49
Kurang dari 134,5	50

Alternatif Jawaban

Distribusi frekuensi kumulatif di atas harus di ubah terlebih dahulu ke dalam distribusi frekuensi yang disajikan berikut ini.

Batas Kelas	Frekuensi
99,5 – 104,5	2
104,5 – 109,5	8
109,5 – 114,5	18
114,5 – 119,5	13
119,5 – 124,5	7
124,5 – 129,5	1
129,5 – 134,5	1

Simpangan rata-rata

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot |x_1 - \overline{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{243,2}{50} = 4,86.$$

Ragam

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} f_i x_i)^2}{n(n-1)} = 36,898.$$

Simpangan baku

$$s = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} f_i x_i)^2}{n(n-1)}} = 6,07.$$

BAB 3

PELUANG

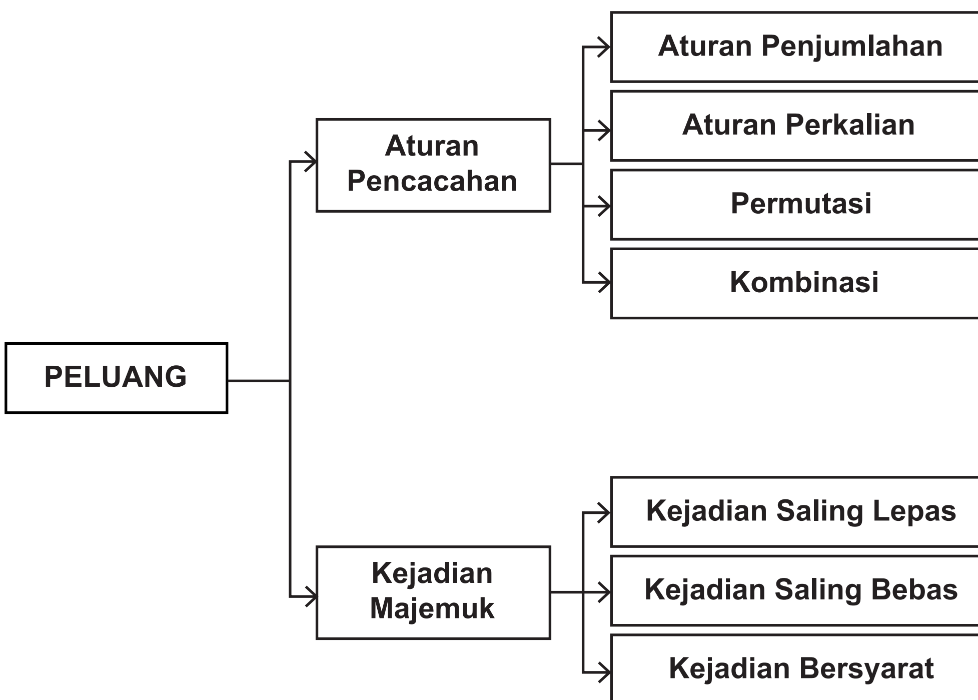
A. Kompetensi Inti (KI) dan Kompetensi Dasar (KD)

Kompetensi Inti (KI)	Kompetensi Dasar (KD)
1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2. Menunjukkan perilaku jujur, disiplin, tanggungjawab, peduli (gotong royong, kerjasama, toleran, damai), santun, responsif dan proaktif sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta alam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia. 3. Memahami, menerapkan, menganalisis dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingintahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah. 4. Mengolah, menalar, menyaji, dan mencipta dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, serta bertindak secara efektif dan kreatif dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.	3.3 Menganalisis aturan pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi) melalui masalah kontekstual 3.4 Mendeskripsikan dan menentukan peluang kejadian majemuk (peluang kejadian-kejadian saling bebas, saling lepas, dan kejadian bersyarat) dari suatu percobaan acak 4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan kaidah pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi) 4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kejadian majemuk (peluang kejadian-kejadian saling bebas, saling lepas, dan kejadian bersyarat)

B. Tujuan Pembelajaran

1. Melalui aktivitas mengamati, mempertanyakan bahan amatannya, melakukan aktivitas untuk mengumpulkan informasi, mengasosiasi semua informasi yang diperoleh, dan mengomunikasikan hasilnya baik dalam kelompok dan klasikal, siswa mampu:
2. Menganalisis aturan pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi) melalui masalah kontekstual
3. Mendeskripsikan kejadian majemuk, peluang saling lepas, peluang saling bebas, peluang bersyarat
4. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan kaidah pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi)
5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kejadian majemuk, peluang saling lepas, peluang saling bebas, peluang bersyarat

C. Diagram Alur Konsep

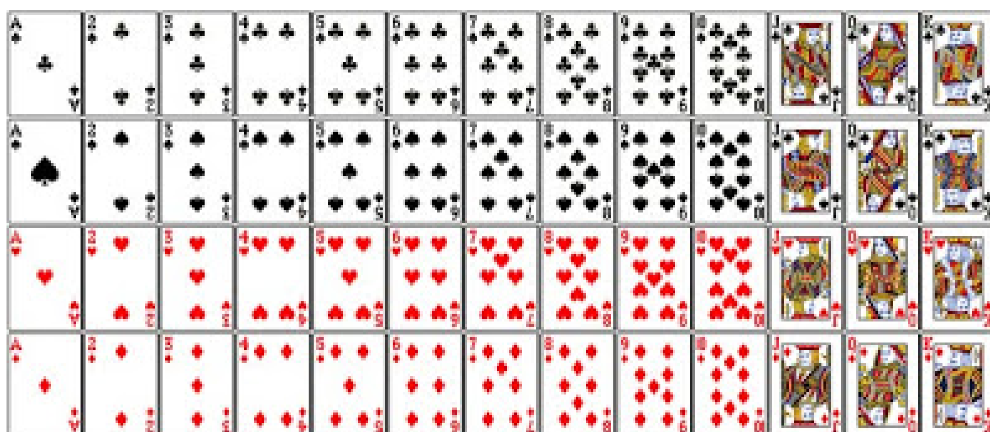


D. Proses Pembelajaran

Subbab 3.1 Permutasi dan Kombinasi
Kegiatan Belajar 3.1.1 Aturan Penjumlahan dan Perkalian

Kegiatan Pendahuluan

- Guru memotivasi siswa dengan mengatakan bahwa dalam kehidupan sehari-hari banyak kejadian yang berhubungan dengan masalah kombinatorik. Misalnya dalam permainan kartu remi. Kemudian guru memperlihatkan dan menanyakan jenis-jenis kartu yang ada pada kartu remi yaitu



Sumber: http://magazinesofthebeginer.blogspot.co.id/2011/03

- Jenis kartu pada pada baris pertama disebut Club (C) (♣), baris kedua disebut Spade (S)(♠), baris ketiga disebut Heart (H) (♥), dan baris terakhir disebut Diamond (D) (♦).
- Dalam satu jenis terdapat 13 kartu (Ace (A), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Jack (J), Queen (Q), King (K)) sehingga totalnya menjadi 52 kartu.
- Guru memberikan media kartu remi pada siswa kemudian menyampaikan tujuan pembelajaran yaitu untuk menemukan konsep aturan penjumlahan dan perkalian melalui penggunaan media kartu remi.

Kegiatan Inti

Mengamati

Guru meminta siswa menggunakan kartu remi untuk melakukan kegiatan pengambilan kartu beserta banyak cara pengambilannya seperti pada Tabel 3.1.1 berikut.

Tabel 3.1.1. Kegiatan Pegambilan kartu remi, dan banyak caranya

No	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak cara
1	Mengambil satu kartu Ace (A)	A-C, A-S, A-H, A-D	4
2	Mengambil satu kartu Queen	Q-C, Q-S, Q-H, Q-D	4
3	Mengambil satu kartu Heart	A-H, 2-H, 3-H, 4-H, 5-H, 6-H, 7-H, 8-H, 9-H, 10-H, J-H, Q-H, K-H,	13
4	Mengambil satu kartu Ace hitam	A-C, A-S	2

Selanjutnya guru meminta siswa untuk melengkapi kegiatan-kegiatan berikut beserta banyak cara pengambilannya seperti pada Tabel 3.1.2 dan Tabel 3.1.3 dalam buku siswa.

Jawaban yang diharapkan

Tabel 3.1.2 Kegiatan Pegambilan kartu remi dan banyak caranya

No	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak cara
5	Mengambil satu kartu Ace atau Queen	A-C, A-S, A-H, A-D, Q-C, Q-S, Q-H, Q-D	8
6	Mengambil satu kartu Ace atau satu kartu Heart	A-C, A-S, A-H, A-D, 2-H, 3-H, 4-H, 5-H, 6-H, 7-H, 8-H, 9-H, 10-H, J-H, Q-H, K-H,	16

No	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak cara
7	Mengambil satu kartu Ace atau satu kartu Ace hitam	A-C, A-S, A-H, A-D	4
8	Mengambil satu kartu Queen atau satu kartu Heart	Q-C, Q-S, Q-H, Q-D, A-H, 2-H, 3-H, 4-H, 5-H, 6-H, 7-H, 8-H, 9-H, 10-H, J-H, K-H,	16
9	Mengambil satu kartu Queen atau satu kartu Ace hitam	Q-C, Q-S, Q-H, Q-D, A-C, A-S	6
10	Mengambil satu kartu Heart atau satu kartu Ace Hitam	A-H, 2-H, 3-H, 4-H, 5-H, 6-H, 7-H, 8-H, 9-H, 10-H, J-H, Q-H, K-H, A-C, A-S	15

Tabel 3.1.3 Kegiatan Pegambilan kartu remi dan banyak caranya

No	Kegiatan	Kemungkinan		Banyak cara
11	Banyak cara mengambil satu kartu Ace (tanpa dikembalikan) kemudian satu kartu Queen	A-C	Q-C Q-S Q-H Q-D	16
		A-S	Q-C Q-S Q-H Q-D	
		A-H	Q-C Q-S Q-H Q-D	
		A-D	Q-C Q-S Q-H Q-D	

12	Banyak cara mengambil kartu Ace (tanpa dikembalikan) kemudian satu kartu Heart	A-C A-S A-H	A-H 2-H 3-H 4-H 5-H 6-H 7-H 8-H 9-H 10-H J-H Q-H K-H A-H 2-H 3-H 4-H 5-H 6-H 7-H 8-H 9-H 10-H J-H Q-H K-H 2-H 3-H 4-H 5-H 6-H 7-H 8-H 9-H 10-H J-H Q-H K-H	4 x 13 - 1 =51

		A-D	A-H 2-H 3-H 4-H 5-H 6-H 7-H 8-H 9-H 10-H J-H Q-H K-H	
13	Banyak cara mengambil kartu Club bernomor ganjil (tanpa dikembalikan) kemudian Club bernomor prima	3-C 5-C 7-C 9-C	2-C 5-C 7-C 2-C 3-C 7-C 2-C 3-C 5-C 2-C 3-C 5-C 7-C	4 x 4 – 3 = 13

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan setelah siswa melakukan kegiatan pada Tabel 3.1.1 – Tabel 3.1.3.

Petunjuk:

Pertanyaan yang diharapkan muncul minimal:
1. Bagaimana hubungan kejadian-kejadian?
2. Apakah ada aturan yang berhubungan dengan kejadian-kejadian di atas?

Menggali Informasi

- Guru meminta siswa membaca informasi tentang hubungan dua kejadian yang ada di buku siswa, kemudian siswa diminta melengkapi tabel untuk pekerjaan pada tabel sebelumnya.
- Guru meminta siswa bertanya apabila ada kesulitan dalam mengerjakan.

Jawaban yang diharapkan

Kegiatan	Hubungan	Kemungkinan yang sama
Nomor 1 dan 2	Saling lepas	-
Nomor 1 dan 3	Tidak saling lepas	A-H
Nomor 1 dan 4	Tidak saling lepas	A-C, A-S
Nomor 2 dan 3	Saling lepas	-
Nomor 2 dan 4	Saling lepas	-
Nomor 3 dan 4	Saling lepas	-

No	Kegiatan	Hubungan	Banyak cara
5	Mengambil satu kartu Ace (kegiatan nomor 1)atau Queen (kegiatan nomor 2)	Saling lepas	8 = 4 (banyak cara kegiatan nomor 1) + 4 (banyak cara kegiatan nomor 2)
6	Mengambil satu kartu Ace (kegiatan nomor 1) atau satu kartu Heart (kegiatan nomor 3)	Tidak saling lepas	16 ≠ 4 (banyak cara kegiatan nomor 1) + 13 (kegiatan nomor 3)
7	Mengambil satu kartu Ace (kegiatan nomor 1) atau satu kartu Ace hitam (kegiatan nomor 4)	Tidak saling lepas	4 ≠ 4 (banyak cara kegiatan nomor 1) + 2 (banyak cara kegiatan nomor 2)
8	Mengambil satu kartu Queen (kegiatan nomor 2) atau satu kartu Heart (kegiatan nomor 3)	Tidak saling lepas	17 ≠ 4 (banyak cara kegiatan nomor 2) + 13 (banyak cara kegiatan nomor 3)

No	Kegiatan	Hubungan	Banyak cara
9	Mengambil satu kartu Queen (kegiatan nomor 2) atau satu kartu Ace hitam (kegiatan nomor 4)	Saling lepas	6 = 4 (banyak cara kegiatan nomor 2) + 2 (banyak cara kegiatan nomor 4)
10	Mengambil satu kartu Heart (kegiatan nomor 3) atau satu kartu Ace Hitam (kegiatan nomor 4)	Saling lepas	15 = 13 (banyak cara kegiatan nomor 3) + 2(banyak cara kegiatan nomor 4)

No	Kegiatan	Hubungan	Banyak cara
11	Banyak cara mengambil satu kartu Ace (kegiatan nomor 1) (tanpa dikembalikan) kemudian satu kartu Queen (kegiatan nomor 2)	Saling lepas	16 = 4 (banyak cara kegiatan nomor 1) x 4 banyak cara kegiatan nomor 2)
12	Banyak cara mengambil kartu Ace (kegiatan nomor 1) (tanpa dikembalikan) kemudian satu kartu Heart (kegiatan nomor 3)	Tidak saling lepas	51 ≠ 4 (banyak cara kegiatan nomor 1) x 13 banyak cara kegiatan nomor 4)
13	Banyak cara mengambil kartu Club bernomor ganjil (tanpa dikembalikan) kemudian Club bernomor prima	Tidak saling lepas	13 ≠ 4 (banyak cara mengambil kartu Club bernomor ganjil) x 4 banyak cara mengambil kartu Club bernomor prima)

Menalar

- Guru menanyakan ke siswa tentang kesimpulan yang telah diperoleh (dituliskan) dalam buku siswa yaitu

    1. Apabila kegiatan 1 dan kegiatan 2 adalah dua kegiatan yang saling lepas, dan misalkan kegiatan 1 terjadi dengan n cara dan kegiatan 2 terjadi dengan m cara, maka kegiatan 1 atau kegiatan 2 akan terjadi sebanyak $m + n$. Aturan ini disebut *dengan aturan penjumlahan*.

2. Apabila kegiatan 1 dan kegiatan 3 adalah dua kegiatan yang tidak saling lepas, dan misalkan kegiatan 1 terjadi dengan n cara dan kegiatan 3 terjadi dengan m cara, maka kegiatan yang diperoleh dari melakukan kegiatan 1 kemudian dilanjutkan dengan kegiatan 3 akan terjadi sebanyak mn. Aturan ini disebut *dengan aturan perkalian*.

- Selanjutnya guru meminta siswa menuliskan perluasan aturan penjumlahan dan perkalian.

Jawaban yang diharapkan dari siswa:

Perluasan Aturan Penjumlahan
Apabila kegiatan 1, kegiatan 2, kegiatan 3, ..., kegiatan m adalah kegiatan-kegiatan yang sepasang-sepasang saling lepas, dan misalkan kegiatan 1 terjadi dengan n_1 cara dan kegiatan 2 terjadi dengan n_1 cara, kegiatan 3 terjadi dengan n_3 cara, …, kegiatan m terjadi dengan n_m cara, maka kegiatan 1, kegiatan 2, kegiatan 3, ..., atau kegiatan m akan terjadi sebanyak $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m$ cara.

Perluasan Aturan Perkalian
Apabila kegiatan 1, kegiatan 2, kegiatan 3, ..., kegiatan m adalah kegiatan-kegiatan yang sepasang-sepasang saling lepas, dan misalkan kegiatan 1 terjadi dengan n_1 cara dan kegiatan 2 terjadi dengan n_1 cara, kegiatan 3 terjadi dengan n_3 cara, …, kegiatan m terjadi dengan nm cara, maka kegiatan yang diperoleh dari melakukan kegiatan 1 kemudian dilanjutkan dengan kegiatan 2, kemudian dilanjutkan dengan kegiatan 3, ..., terakhir dilanjutkan dengan kegiatan m, akan terjadi sebanyak $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_m$ cara.

Mengomunikasikan

- Guru meminta siswa untuk berpasangan dengan teman sebangku (bersebelahan) untuk membuat minimal 4 pasang kejadian yang saling lepas untuk menerapkan aturan tersebut.
- Guru berkeliling kelas untuk membantu siswa yang mengalami kesulitan dalam membuat soal dan penyelesaiannya.
- Selanjutnya guru meminta (mengatur) kelompok untuk saling menukar soal yang telah dibuat untuk dikerjakan oleh kelompok lainnya.
- Selanjutnya guru meminta kelompok yang memberi soal untuk mengoreksi pekerjaan kelompok yang mengerjakan soal.

- Guru berkeliling kelas untuk membantu kelompok yang mengalami permasalahan, misalnya terjadi ketidaksamaan antar kelompok dalam menyelesaikan soal.

Kegiatan Penutup

Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut

Kegiatan Belajar 3.1.2 Penyusunan dan Pengambilan

Kegiatan Pendahuluan

- Guru memberikan pengantar tentang dua kegiatan penyususun dan pengambilan, misalanya seperti dalam buku siswa: Dalam kehidupan sehari-hari, tentu istilah penyusunan dan pengambilan adalah dua kegiatan yang berbeda. Sebagai contoh, apabila Anda mempunyai empat kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D), kemudian diminta untuk menyusun kartu Ace tersebut dua-dua, maka tentu berbeda apabila Anda diminta mengambil dua kartu dari empat kartu Ace tersebut.
- Selanjutnya guru meminta siswa untuk melakukan kegiatan untuk mengeksplorasi kesamaan dan perbedaaan dari kegiatan penyusunan dan pengambilan secara berkelompok 3- 4 orang.

Kegiatan Inti

Mengamati

Guru meminta siswa menggunakan kartu remi (jika diperlukan) untuk melakukan kegiatan penyusunan atau pengambilan kartu (tanpa pengembalian) dan kemudian menuliskan hasilnya seperti pada tabel pada buku siswa.

Jawaban yang diharapkan

Tabel 3.1.4 Kegiatan Penyusunan dan Pengambilan Kartu

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
1.	Menyusun 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace	A-C A-S, A-C A-H, A-C A-D, A-S A-C, A-S A-H, A-S A-D, A-H A-C, A-H A-S, A-H A-D, A-D A-C, A-D A-S, A-D A-H	12
2.	Mengambil 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace	~~A-C A-S~~, ~~A-C A-H~~, ~~A-C A-D~~, ~~A-S A-C~~, ~~A-S A-H~~, ~~A-S A-D~~, ~~A-H A-C~~, ~~A-H A-S~~, ~~A-H A-D~~, ~~A-D A-C~~, ~~A-D A-S~~, ~~A-D A-H~~	6
3.	Menyusun 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace	A-C A-S A-H, A-C A-S A-D, A-C A-H A-S,A-C A-H A-D, A-C A-D A-S, A-C A-D A-H, A-S A-C A-H, A-S A-C A-D, A-S A-H A-C, A-S A-H A-D, A-S A-D A-C, A-S A-D A-H, A-H A-C A-S, A-H A-C A-D, A-H A-S A-C, A-H A-S A-D, A-H A-D A-C, A-H A-D A-S, A-D A-C A-S, A-D A-C A-H, A-D A-S A-C, A-D A-S A-H, A-D A-H A-C, A-D A-H A-S	24
4.	Mengambil 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace	A-C A-S A-H, A-C A-S A-D, ~~A-C A-H A-S~~,A-C A-H A-D, ~~A-C A-D A-S~~, ~~A-C A-D A-H~~, ~~A-S A-C A-H~~, ~~A-S A-C A-D~~, ~~A-S A-H A-C~~, A-S A-H A-D, ~~A-S A-D A-C~~, ~~A-S A-D A-H~~, ~~A-H A-C A-S~~, ~~A-H A-C A-D~~, ~~A-H A-S A-C~~, ~~A-H A-S A-D~~, ~~A-H A-D A-C~~, ~~A-H A-D A-S~~, ~~A-D A-C A-S~~, ~~A-D A-C A-H~~, ~~A-D A-S A-C~~, ~~A-D A-S A-H~~, ~~A-D A-H A-C~~, ~~A-D A-H A-S~~	4

5.	Menyusun 4 kartu Ace dari 4 kartu Ace	A-C A-S A-H A-D, A-C A-S A-D A-H, A-C A-H A-S A-D,A-C A-H A-D A-S, A-C A-D A-S A-H, A-C A-D A-H A-S, A-S A-C A-H A-D, A-S A-C A-D A-H, A-S A-H A-C A-D,A-S A-H A-D A-C, A-S A-D A-C A-H, A-S A-D A-H A-C, A-H A-C A-S A-D, A-H A-C A-D A-S, A-H A-S A-C A-D, A-H A-S A-D A-C, A-H A-D A-C A-S, A-H A-D A-S A-C, A-D A-C A-S A-H, A-D A-C A-H A-S, A-D A-S A-C A-H, A-D A-S A-H A-C, A-D A-H A-C A-S, A-D A-H A-S A-C	24
6.	Mengambil 4 kartu Ace dari 4 kartu Ace	A-C A-S A-C A-D	1
7.	Menyusun 2 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C	2-C 3-C, 2-C 4-C, 2-C 5-C, 2-C 6-C, 3-C 2-C, 3-C 4-C, 3-C 5-C, 3-C 6-C, 4-C 2-C, 4-C 3-C, 4-C 5-C, 4-C 6-C, 5-C 2-C, 5-C 3-C, 5-C 4-C, 5-C 6-C, 6-C 2-C, 6-C 3-C, 6-C 4-C, 6-C 5-C	20
8.	Mengambil 2 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C	2-C 3-C, 2-C 4-C, 2-C 5-C, 2-C 6-C, ~~3-C 2~~-C, 3-C 4-C, 3-C 5-C, 3-C 6-C, 4-C 2-C, 4-C 3-C, 4-C 5-C, 4-C 6-C, ~~5-C 2-C, 5-C 3-C, 5-C 4-C~~, 5-C 6-C, ~~6-C 2-C, 6-C 3-C, 6-C 4-C, 6-C 5-C,~~	10

Istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan

Penyusunan
Pengambilan
Tanpa pengembalian
Aturan penjumlahan
Aturan perkalian

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait dengan kegiatan penyusunan dan pengambilan (tanpa pengembalian) dengan menggunakan kata bantu seperti: perbedaan atau persamaan, cara menentukan banyak penyusunan atau pengambilan, aturan penjumlahan dan perkalian.

Pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa minimal:

1. Apa perbedaaan dan persamaan dari penyusunan dan pengambilan.
2. Apakah ada cara atau formula umum untuk menentukan banyak cara penyusunan dan banyak cara pengambilan.
3. Apakah aturan penjumlahan dan perkalian dapat digunakan dalam menentukan banyak cara penyusunan atau pengambilan.

Menggali Informasi

- Guru meminta masing-masing siswa untuk membaca informasi yang ada dalam buku siswa terkait dengan penjelasan kegiatan penyusunan dan pengambilan, kemudian didiskusikan dengan teman dalam kelompoknya.
- Guru meminta siswa bertanya apabila ada kesulitan dalam mengerjakan.

Menalar

- Guru meminta masing-masing siswa dalam setiap kelompok untuk menuliskan dengan bahasa sendiri tentang permutasi dan kombinasi.
- Selanjutnya guru meminta masing-masing kelompok untuk mendiskusikan tentang apa itu permutasi dan apa itu kombinasi

Jawaban yang diharapkan dari siswa:

- Permutasi r unsur dari n unsur merupakan penyusunan r unsur dari n unsur tanpa pengulangan dan dinotasikan dengan nPr atau $P(n, r)$ dengan $0 < r \leq n$.
- Kombinasi r unsur dari n unsur merupakan pengambilan r unsur dari n unsur tanpa pengembalian dan dinotasikan dengan nCr atau $C(n, r)$ dengan $0 < r \leq n$.
- Perbedaan penyusunan dan pengambilan adalah kalau dalam penyusunan urutan unsur diperhatikan, tetapi dalam pengambilan urutan unsur tidak diperhatikan.

- Kesamaan dari penyusunan dan pengambilan adalah tidak adanya pengulangan unsur baik dalam penyusunan maupun pengambilan.

Mengomunikasikan

- Guru meminta setiap kelompok untuk menuliskan beberapa contoh permutasi dan kombinasi dan dicoba untuk dihitung berapa nilai dari permutasi dan kombinasi tersebut.
- Guru berkeliling kelas untuk membantu siswa yang mengalami kesulitan dalam membuat soal dan penyelesaiannya.
- Selanjutnya guru meminta (mengatur) kelompok untuk saling menukar soal yang telah dibuat untuk dikerjakan oleh kelompok lainnya.
- Selanjutnya guru meminta kelompok yang memberi soal untuk mengoreksi pekerjaan kelompok yang mengerjakan soal.
- Guru berkeliling kelas untuk membantu kelompok yang mengalami permasalah, misalnya terjadi ketidaksamaan antar kelompok dalam menyelesaikan soal.

Kegiatan Penutup

Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut.

Kegiatan Belajar 3.1.3 Menentukan Rumus Permutasi dan Penerapannya

Kegiatan Pendahuluan

- Guru mengingatkan kembali tentang dua pertemuan sebelumnya yang membahas tentang aturan penghitungan dan pengertian permutasi dan kombinasi.
- Selanjutnya guru menjelaskan tujuan untuk pertemuan kali ini, yaitu untuk menurunkan rumus permutasi serta penerapannya dalam permasalahan sehari-hari.
- Guru memberikan beberapa istilah, definisi beserta contoh-contohnya yang digunakan dalam penurunan rumus permutasi, yaitu:

NOTASI FAKTORIAL

Definisi.

1. Untuk suatu n bilangan asli, $n!$ (dibaca n faktorial) didefinisikan sebagai

   $n! = n \,.\, (n-1) \,.\, \ldots \,.\, 2.1 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (n-1) \,.\, n$

2. $0! = 1$

Contoh.

1. $5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$
2. $3! + 4! = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 + 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6 + 24 = 30$
3. $3! \,.\, 4! = (3 \,.\, 2 \,.\, 1) \,.\, (4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1) = 6 \,.\, 24 = 144$
4. $\frac{5!}{3!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1} = 5 \,.\, 4 = 20.$

Kegiatan Inti

Mengamati

- Setelah menjelaskan tentang materi notasi faktorial beserta contoh-contohnya, guru meminta siswa untuk berdiskusi dengan teman sebangkunya (sebelahnya) untuk mengamati contoh-contoh beserta penyelesaiannya yang berkenaan dengan penurunan rumus permutasi seperti pada buku siswa, yaitu:

Contoh 3.1.2

Berapa banyak cara menyusun 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D)

Penyelesaian.

Untuk menyelesaikan hal ini, Anda dapat membuat bantuan dua kotak sebagai tempat pengaturan dua kartu Ace tersebut, misalnya

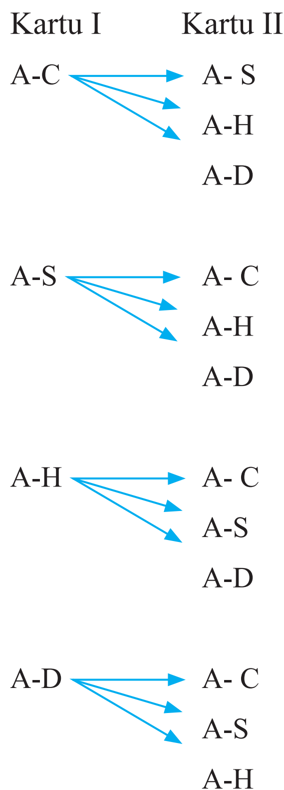
(1)	(2)
...	...

Kotak (1) dapat diisi oleh 4 kartu Ace, yaitu A-C, A-S, A-H, A-D, sehingga pada kotak (1) ada 4 kemungkinan.

Pada kotak (2) hanya dapat diisi oleh 3 kemungkinan, karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1), yaitu

- Jika kotak (1) diisi A-C, maka pada kotak (2) dapat diisi A-S, A-H, A-D atau
- Jika kotak (1) diisi A-S, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-H, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-H, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-S, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-D, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-S, A-H

Kemungkinan ini dapat digambarkan dengan diagram batang sebagai berikut.



Dengan demikian pada kotak (1) ada 4 kemungkinan dan kotak (2) ada 3 kemungkinan

(1)	(2)
4	3

Dengan aturan perkalian diperoleh banyak cara penyusunan adalah 4 . 3 = 12.

Perhatikan bahwa $4 \, . \, 3 = \frac{4.3.2.1}{2.1} = \frac{4!}{(4-2)!}$.

Contoh 3.1.3

Berapa banyak cara menyusun 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D)

Penyelesaian.

Untuk menyelesaiankan hal ini, Anda dapat membuat bantuan tiga kotak sebagai tempat pengaturan tiga kartu Ace tersebut, misalnya

(1)	(2)	(3)
...	...	...

Kotak (1) dapat diisi oleh 4 kartu Ace, yaitu A-C, A-S, A-H, A-D, sehingga pada kotak (1) ada 4 kemungkinan.

Pada kotak (2) hanya dapat diisi oleh 3 kemungkinan, karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1), yaitu

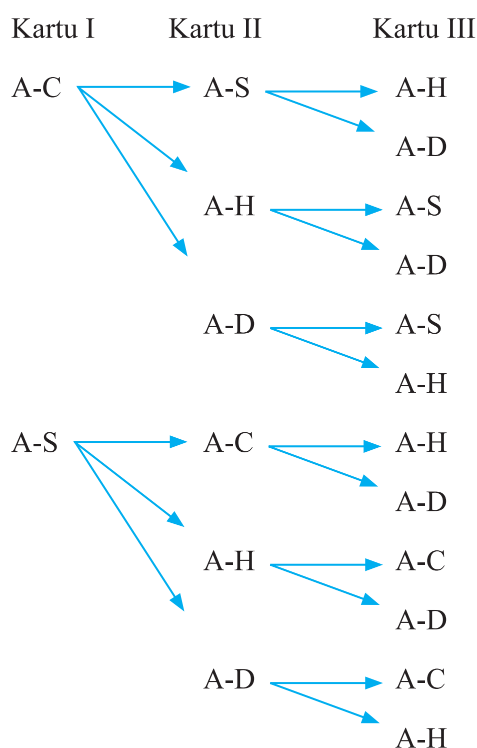
- Jika kotak (1) diisi A-C, maka pada kotak (2) dapat diisi A-S, A-H, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-S, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-H, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-H, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-S, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-D, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-S, A-H

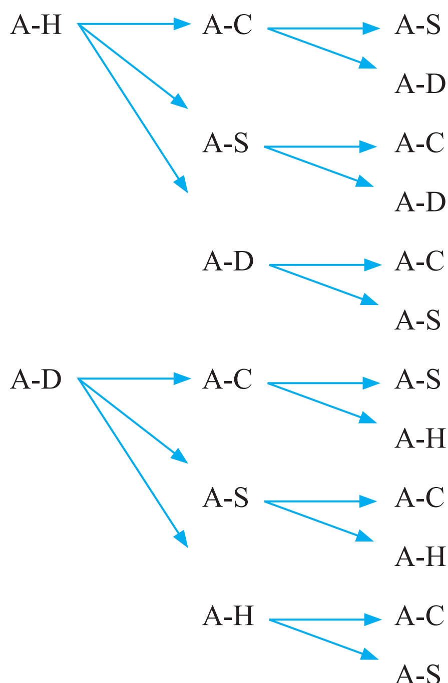
Pada kotak (3) hanya dapat diisi oleh 2 kemungkinan, karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1) dan 1 kartu pada kotak (2), yaitu

- Jika kotak (1) diisi A-C, kotak (2) diisi A-S, maka kotak (3) dapat diisi A-H atau A-D

- Jika kotak (1) diisi A-C, kotak (2) diisi A-H, maka kotak (3) dapat diisi A-S atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-C, kotak (2) diisi A-D, maka kotak (3) dapat diisi A-S atau A-H
- Jika kotak (1) diisi A-S, kotak (2) diisi A-C, maka kota (3) diisi A-H atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-S, kotak (2) diisi A-H, maka kota (3) diisi A-C atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-S, kotak (2) diisi A-D, maka kota (3) diisi A-C atau A-H
- Jika kotak (1) diisi A-H, kotak (2) diisi A-C, maka kotak (3) diisi A-S atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-H, kotak (2) diisi A-S, maka kotak (3) diisi A-C atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-H, kotak (2) diisi A-D, maka kotak (3) diisi A-C atau A-S
- Jika kotak (1) diisi A-D, kotak (2) diisi A-C, maka kotak (3) diisi A-S atau A-H
- Jika kotak (1) diisi A-D, kotak (2) diisi A-S, maka kotak (3) diisi A-C atau A-H
- Jika kotak (1) diisi A-D, kotak (2) diisi A-H, maka kotak (3) diisi A-C atau A-S

Kemungkinan ini dapat digambarkan dengan diagram batang sebagai berikut.





Dengan demikian pada kotak (1) ada 4 kemungkinan, kotak (2) ada 3 kemungkinan, dan kotak (3) ada 3 kemungkinan, yaitu

(1)	(2)	(3)
4	3	2

Dengan aturan perkalian diperoleh banyak cara penyusunan adalah 4 . 3 . 2 = 24.

Perhatikan bahwa $4 \,.\, 3 \,.\, 2 = \frac{4.3.2.1}{1} = \frac{4!}{(4-3)!}$.

Contoh 3.1.4

Tentukan banyak cara menyusun 3 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C.

Penyelesaian.

Untuk menyelesaiankan hai ini, Anda dapat membuat bantuan tiga kotak sebagai tempat pengaturan tiga kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C, misalnya

(1)	(2)	(3)
...	...	...

Karena kartunya terdapat 5, maka Kotak (1) dapat diisi oleh 5 kartu, sehingga pada kotak (1) ada 5 kemungkinan.

Karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1), maka sisa kartu tinggal 4 yang akan diisikan pada kotak (2). Dengan demikian pada kotak (2) terdapat 4 kemungkinan.

Pada kotak (3) hanya dapat diisi oleh 3 kemungkinan, karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1) dan 1 kartu pada kotak (2).

Silakan Anda membuat diagram batang untuk menggambarkan kemungkinan tersebut. Apa yang dapat kamu rasakan?

Jadi pada kotak (1) ada 5 kemungkinan, kotak (2) ada 3 kemungkinan, dan kotak (3) ada 3 kemungkinan, yaitu

(1)	(2)	(3)
5	4	3

Dengan aturan perkalian diperoleh banyak cara penyusunan adalah 5 . 4 . 3 = 60.

Perhatikan bahwa $5 \,.\, 4 \,.\, 3 = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = \frac{5!}{(5-3)!}$.

Contoh 3.1.5

Tentukan banyak cara mendistribusikan (membagikan) 3 kartu berbeda kepada 5 pemain dengan syarat setiap pemain paling banyak mendapatkan satu kartu.

Penyelesaian

Anda dapat menyelesaikan masalah ini dengan langkah sebagai berikut.

- Kartu pertama dapat dibagikan kepada 5 pemain, sehingga banyak cara membagikan kartu pertama sebanyak 5 kemungkinan.
- Karena satu pemain sudah mendapat 1 kartu, maka tinggal 4 pemain yang dapat dibagikan kartu kedua, sehingga banyak cara membagikan kartu kedua sebanyak 4 kemungkinan.

- Kartu ketiga (terakhir) dapat dibagikan kepada 3 pemain, karena 2 pemain sudah mendapat masing-masing 1 kartu. Sehingga banyak cara mebagikan kartu ketiga sebanyak 3 kemungkinan.

Dengan menggunakan prinsip perkalian, maka banyak cara mendistribusikan 3 kartu berbeda kepada 5 pemain dengan syarat setiap pemain paling banyak mendapatkan satu kartu sama dengan $5 \,.\, 4 \,.\, 3 = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$.

Menanya

- Guru meminta siswa dalam kelompok mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait contoh-contoh yang telah diamati berhubungan dengan penurunan rumus permutasi
- Guru mengingatkan contoh pertanyaan yang bisa digunakan seperti yang terdapat pada buku siswa.

Pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa minimal:

1. Bagaimana memperoleh rumus umum untuk masalah permutasi r unsur dari n unsur?
2. Apakah mungkin terjadi permutasi r unsur dari n unsur dengan $r > n$?
3. Adakah masalah lain yang ekuivalen dengan masalah permutasi r unsur dari n unsur?

Menggali Informasi

- Guru meminta masing-masing siswa untuk membaca informasi yang ada dalam buku siswa terkait dengan penjelasan menurunkan rumus untuk banyak permutasi r unsur dari n unsur dan mendistribusikan r unsur berbeda ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur, kemudian didiskusikan dengan teman dalam kelompoknya.
- Guru meminta siswa bertanya apabila ada kesulitan dalam mengerjakan.

Menalar:

- Guru meminta masing-masing siswa dalam setiap kelompok untuk menuliskan dengan bahasa sendiri tentang rumus permutasi dan permasalahan lain yang ekuivalen dengan masalah permutasi.

Jawaban yang diharapkan dari siswa:

- Banyak permutasi r unsur dari n unsur, $nPr = P(n, r) = \frac{n!}{(n\text{-}r)!} =$ untuk $0 < r \leq n$.
- Banyak cara mendistribusikan r unsur berbeda ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur adalah

  $n \, . \, (n - 1) \, . \, (n - 2) \, . \, ... \, . \, (n - \mathrm{r} + 1) = P(n, r) = \frac{n!}{(n\text{-}r)!}$.
- Banyak cara mendistribusikan r unsur berbeda ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur adalah masalah yang ekuivalen dengan masalah banyak permutasi r unsur dari n unsur.

Mengomunikasikan

- Guru meminta siswa berkelompok 3 – 4 orang perkelompok untuk membuat 4 soal penerapan permutasi beserta jawabannya
- Guru berkeliling kelas untuk membantu siswa yang mengalami kesulitan dalam membuat soal dan penyelesaiannya.
- Selanjutnya guru meminta (mengatur) kelompok untuk saling menukar soal yang telah dibuat untuk dikerjakan oleh kelompok lainnya.
- Selanjutnya guru meminta kelompok yang memberi soal untuk mengoreksi pekerjaan kelompok yang mengerjakan soal.
- Guru berkeliling kelas untuk membantu kelompok yang mengalami permasalah, misalnya terjadi ketidaksamaan antar kelompok dalam menyelesaikan soal.

Kegiatan Penutup

Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut.

Kegiatan Belajar 3.1.4 Menentukan Rumus Kombinasi dan Penerapannya

Kegiatan Pendahuluan

- Guru mengingatkan kembali pertemuan sebelumnya yang membahas tentang aturan penurunan rumus permutasi dan diperoleh rumus banyak permutasi r unsur dari n unsur adalah $nPr = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$, untuk $0 < r \leq n$.
- Selanjutnya guru juga mengingatkan selain ada masalah permutasi (penyusunan) juga terdapat masalah lain yaitu kombinasi (pengambilan). Juga guru mengingatkan perbedaan dan kesamaan antara permutasi dan kombinasi, yaitu:
    - Perbedaan penyusunan dan pengambilan adalah kalau dalam penyusunan urutan unsur diperhatikan, tetapi dalam pengambilan urutan unsur tidak diperhatikan.
    - Kesamaan dari penyusunan dan pengambilan adalah tidak adanya pengulangan unsur baik dalam penyusunan maupun pengambilan.
- Guru menjelaskan tujuan untuk pertemuan kali ini, yaitu untuk menurunkan rumus kombinasi serta penerapannya dalam permasalahan sehari-hari.

Kegiatan Inti

Mengamati

- Guru meminta siswa untuk berdiskusi dengan teman sebangkunya (sebelahnya) untuk mengamati contoh-contoh beserta penyelesaiannya yang berkenaan dengan penurunan rumus kombinasi seperti pada buku siswa, yaitu:

Contoh 3.1.6

Berapa banyak cara pengambilan 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D)

Penyelesaian.

Banyak cara pengambilan 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) sebanyak 6 yaitu, A-C A-S, A-C A-H, A-C A-D, A-S A-H, A-S A-D, A-H

A-D. Hal ini sama halnya dengan menentukan banyaknya himpunan bagian dari {A-C, A-S, A-H, A-D} yang mempunyai 2 anggota, yaitu {A-C, A-S}, {A-C, A-H}, {A-C, A-D}, {A-S, A-H}, {A-S, A-D}, {A-H, A-D}.

Sudah dijelaskan sebelumnya bahwa banyak cara mengambil 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari kombinasi 2 unsur dari 4 unsur, 2C4 atau C(4,2). Sedangkan banyak cara menyusun 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari permutasi 2 unsur dari 4 unsur, 2P4 atau P(4,2).

Kalau Anda perhatikan bahwa banyak cara permutasi 2 unsur dari 4 unsur P(4,2) dapat diperoleh dari menyusun setiap unsur C(4,2), yaitu {A-C, A-S}, {A-C, A-H}, {A-C, A-D}, {A-S, A-H}, {A-S, A-D}, {A-H, A-D}. Anda ketahui bahwa banyak susunan dari {A-C, A-S} sama dengan banyak permutasi 2 unsur yaitu P(2,2), demikian juga banyak susunan untuk untuk {A-C, A-H}, {A-C, A-D}, {A-S, A-H}, {A-S, A-D}, {A-H, A-D} sama dengan P(2,2). Jadi banyak banyak cara permutasi 2 unsur dari 4 unsur P(4,2) sama dengan banyak cara kombinasi 2 unsur dari 4 unsur C(4,2) dikalikan banyak permutasi 2 unsur P(2,2) atau P(4,2) = C(4,2) P(2,2). Sehingga diperoleh $C(4,2) = \frac{P(4,2)}{P(2,2)}$.

Contoh 3.1.7

Berapa banyak cara pengambilan 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D)

Penyelesaian.

Banyak cara pengambilan 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) sebanyak 3 yaitu, A-C A-S A-H, A-C A-H A-D, A-S A-H A-D. Hal ini sama halnya dengan menentukan banyaknya himpunan bagian dari {A-C, A-S, A-H, A-D} yang mempunyai 3 anggota, yaitu {A-C, A-S. A-H}, {A-C, A-H, A-D}, {A-S, A-H, A-D}.

Banyak cara mengambil 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari kombinasi 3 unsur dari 4 unsur, 3C4 atau C(4,3), sedangkan banyak cara menyusun 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari permutasi 3 unsur dari 4 unsur, 3P4 atau P(4,3).

Kalau Anda perhatikan bahwa banyak cara permutasi 3 unsur dari 4 unsur P(4,3) dapat diperoleh dari menyusun setiap unsur C(4,3), yaitu {A-C, A-S, A-D}, {A-C, A-H, A-D}, {A-S, A-H, A-D}. Anda ketahui bahwa banyak susunan dari {A-C, A-S, A-D} sama dengan banyak permutasi 3 unsur P(3,3). Demikian juga banyak susunan untuk {A-C, A-H, A-D}, {A-S, A-H, A-D} sama dengan permutasi 3 unsur P(3,3). Jadi banyak cara permutasi 3 unsur dari 4 unsur P(4,3) sama dengan banyak cara kombinasi 3 unsur dari 4 unsur C(4,3) dikalikan banyak permutasi 3 unsur P(3,3) atau P(4,3) = C(4,3) P(3,3). Sehingga diperoleh $C(4,3) = \frac{P(4,3)}{P(3,3)}$.

Contoh 3.1.8

Tentukan banyak cara pengambilan 3 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C.

Penyelesaian.

Banyak cara pengambilan 3 kartu Ace dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C sama halnya dengan menentukan banyaknya himpunan bagian dari {2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C} yang mempunyai 3 anggota, yaitu 8 diantaranya: {2-C, 3-C, 4-C}, {2-C, 3-C, 5-C}, {2-C, 3-C, 6-C}, {2-C, 4-C, 5-C}, { 2-C, 4-C, 6-C}, {3-C, 4-C, 5-C}, {3-C, 4-C, 6-C}, {4-C, 5-C, 6-C}.

Banyak cara mengambil 3 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C merupakan contoh dari kombinasi 3 unsur dari 5 unsur, 3C5 atau C(5,3), sedangkan banyak cara menyusun 3 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C merupakan contoh dari permutasi 3 unsur dari 5 unsur, 3P5 atau P(5,3).

Kalau Anda perhatikan bahwa banyak cara permutasi 3 unsur dari 5 unsur P(5,3) dapat diperoleh dari menyusun setiap unsur C(5,3), yaitu {2-C, 3-C, 4-C}, {2-C, 3-C, 5-C}, {2-C, 3-C, 6-C}, {2-C, 4-C, 5-C}, { 2-C, 4-C, 6-C}, {3-C, 4-C, 5-C}, {3-C, 4-C, 6-C}, {4-C, 5-C, 6-C}. Anda ketahui bahwa banyak susunan dari {2-C, 3-C, 4-C} sama dengan banyak permutasi 3 unsur P(3,3). Demikian juga banyak susunan untuk {2-C, 3-C, 5-C}, {2-C, 3-C, 6-C}, {2-C, 4-C, 5-C}, { 2-C, 4-C, 6-C}, {3-C, 4-C, 5-C}, {3-C, 4-C, 6-C}, {4-C, 5-C, 6-C} sama dengan permutasi 3 unsur P(3,3). Jadi banyak cara permutasi 3 unsur dari 5 unsur P(5,3) sama dengan banyak cara kombinasi 3 unsur dari 5 unsur C(5,3) dikalikan banyak permutasi 3 unsur P(3,3) atau P(5,3) = C(5,3) P(3,3). Sehingga diperoleh $C(5,3) = \frac{P(5,3)}{P(3,3)}$.

Contoh 3.1.9

Tentukan banyak cara mendistribusikan (membagikan) 3 unsur yang sama ke 5 tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak diisi 1 unsur.

Penyelesaian

Masalah ini dapat dipandang sebagai masalah mengambil 3 tempat dari 5 tempat berbeda yang ada untuk ditempati oleh 3 unsur yang sama. Dengan demikian, masalah ini sama halnya seperti masalah pada contoh 3. Jadi banyak cara mendistribusikan (membagikan) 3 unsur yang sama ke 5 tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak diisi 1 unsur adalah C(5,3).

Menanya

- Guru meminta siswa dalam kelompok mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait contoh-contoh yang telah diamati berhubungan dengan penurunan rumus kombinasi
- Guru mengingatkan contoh pertanyaan yang bisa digunakan seperti yang terdapat pada buku siswa.

Pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa minimal:

1. Bagaimana memperoleh rumus umum untuk masalah kombinasi r unsur dari n unsur?
2. Apakah mungkin terjadi kombinasi r unsur dari n unsur dengan $r > n$?
3. Adakah masalah lain yang ekuivalen dengan masalah kombinasi r unsur dari n unsur?

Menggali Informasi

- Guru meminta masing-masing siswa untuk membaca informasi yang ada dalam buku siswa terkait dengan penjelasan menurunkan rumus untuk banyak kombinasi r unsur dari n unsur dan mendistribusikan r unsur yang sama ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur, kemudian didiskusikan dengan teman dalam kelompoknya.
- Guru meminta siswa bertanya apabila ada kesulitan dalam mengerjakan.

Menalar

- Guru meminta masing-masing siswa dalam setiap kelompok untuk menuliskan dengan bahasa sendiri tentang rumus kombinasi dan permasalahan lain yang ekuivalen dengan masalah permutasi.

Jawaban yang diharapkan dari siswa:

- Banyak kombinasi r unsur dari n unsur adalah $nCr = C(n, r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$, untuk $0 < r \leq n$.
- Banyak cara mendistribusikan r unsur yang sama ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur adalah $C(n, r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$.
- Banyak cara mendistribusikan r unsur yang sama ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur merupakan masalah yang ekuivalen dengan masalah banyak cara kombinasi r unsur dari n unsur.

Mengomunikasikan

- Guru meminta siswa berkelompok 3–4 orang perkelompok untuk membuat 4 soal penerapan kombinasi beserta jawabannya
- Guru berkeliling kelas untuk membantu siswa yang mengalami kesulitan dalam membuat soal dan penyelesaiannya.
- Selanjutnya guru meminta (mengatur) kelompok untuk saling menukar soal yang telah dibuat untuk dikerjakan oleh kelompok lainnya.
- Selanjutnya guru meminta kelompok yang memberi soal untuk mengoreksi pekerjaan kelompok yang mengerjakan soal.
- Guru berkeliling kelas untuk membantu kelompok yang mengalami permasalah, misalnya terjadi ketidaksamaan antar kelompok dalam menyelesaikan soal.

Kegiatan Penutup

Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut.

Kegiatan Belajar 3.1.5 Menentukan Rumus Permutasi dengan Beberapa Unsur Sama dan Penerapannya

Kegiatan Pendahuluan

- Guru mengingatkan kembali pertemuan sebelumnya tentang menentukan rumus permutasi n unsur, yaitu $P(n, n) = n!$ di mana n unsur yang diketahui adalah semuanya berbeda.
- Guru selanjutnya bertanya kepada siswa, apabila dalam n unsur terdapat beberapa unsur yang sama, bagaimana rumus untuk masalah ini.
- Guru menjelaskan tujuan untuk pertemuan kali ini, yaitu untuk menurunkan permutasi n unsur dengan berapa unsur yang sama beserta penerapannya dalam permasalahan sehari-hari.
- Aturan penurunan rumus permutasi dan diperoleh rumus banyak permutasi r unsur dari n unsur adalah $nPr = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$, untuk $0 < r \leq n$.

Kegiatan Inti

Mengamati

- Guru meminta siswa untuk berdiskusi dengan teman sebangkunya (sebelahnya) untuk mengamati contoh-contoh beserta penyelesaiannya yang berkenaan dengan penurunan rumus permutasi n unsur dengan beberapa unsur yang sama seperti pada buku siswa, yaitu:

Contoh 3.1.10

Tentukan banyak susunan yang diperoleh dari 3 huruf A, 2 huruf B, dan 1 huruf C.

Penyelesaian.

Masalah ini dapat dipandang sebagai masalah meletakkan 3 huruf A, 2 huruf B, dan 1 huruf C ke dalam 6 tempat berbeda dengan syarat setiap tempat tepat terisi 1 huruf. Misalkan 6 tempat ini dapat diilustrasikan sebagai 6 kotak berikut.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
...	...	...	...	...	...

Maka masalah ini diselesaikan dengan langkah berikut.

- Pertama letakkan 3 huruf A ke dalam 6 kotak yang tersedia, ini berarti sama dengan $C(6,3)$.
- Berikutnya, karena 3 kotak sudah terisi, letakkan 2 huruf B ke dalam 3 kotak yang tersisa, ini berarti sama dengan $C(3,2)$.
- Terakhir letakkan 1 huruf *C* ke dalam 1 kotak tersisi, yang banyaknya sama dengan $C(1,1)$.

Dengan aturan perkalian, diperoleh banyak susunan yang diperoleh dari 3 huruf A, 2 huruf B, dan 1 huruf *C* adalah $C(6,3)\ .\ C(3,2)\ .\ C(1,1) = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60.$

Contoh 3.1.11

Berapa banyak cara penyusunan kata yang disusun dari kata "SUSUNAN".

Penyelesaian.

Huruf-huruf dari kata "SUSUNAN" sebanyak 7 huruf yang terdiri dari 2 huruf S, 2 uruf U, 2 huruf N dan 1 huruf A. Seperti halnya contoh 1, masalah ini dapat dipandang sebagai masalah meletakkan 2 huruf S, 2 huruf U, 2 huruf N dan 1 huruf A ke dalam 7 tempat berbeda dengan syarat setiap tempat tepat terisi 1 huruf. Misalkan 7 tempat ini dapat diilustrasikan sebagai 7 kotak berikut.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
...	...	...	...	...	...	...

Maka masalah ini diselesaikan dengan langkah berikut.

- Pertama letakkan 2 huruf S ke dalam 7 kotak yang tersedia, ini berarti sama dengan C(7,2).
- Berikutnya, karena 2 kotak sudah terisi, letakkan 2 huruf U ke dalam 5 kotak yang tersisa, ini berarti sama dengan C(5,2).
- Selanjutnya, karena sudah 4 kotak sudah terisi, maka letakkan 2 huruf N kedalam 3 kotak yang tersisi, sehingga banyak cara adalah C(3,2).
- Terakhir letakkan 1 huruf C ke dalam 1 kotak tersisi, yang banyaknya sama dengan C(1,1).

Dengan aturan perkalian, diperoleh cara penyusunan kata yang disusun dari kata "SUSUNAN" adalah

$$C(7,2)\ .\ C(5,2)\ .\ C(3,2)\ .\ C(1,1) = \frac{7!}{2!\ 5!}\cdot\frac{5!}{2!\ 3!}\cdot\frac{3!}{2!\ 1!}\cdot\frac{1!}{1!\ 0!} = \frac{7!}{2!\ 2!\ 2!\ 1!} = 630.$$

Menanya

- Guru meminta siswa dalam kelompok mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait contoh-contoh yang telah diamati berhubungan dengan penurunan rumus permutasi dengan beberapa unsur yang sama.
- Guru mengingatkan contoh pertanyaan yang bisa digunakan seperti yang terdapat pada buku siswa.

Pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa minimal:

Bagaimana memperoleh rumus umum untuk masalah permutasi n unsur dengan beberapa unsur yang sama?

Menggali Informasi

- Guru meminta masing-masing siswa untuk membaca informasi yang ada dalam buku siswa terkait dengan penjelasan menurunkan rumus untuk banyak permutasi n unsur yang terdiri dari n_1 unsur jenis pertama, n_2 unsur jenis kedua, n_3 unsur jenis ketiga, ..., n_k unsur jenis ke-k ($n = n_1 + n_2 + r_3 + ... + n_k$), kemudian didiskusikan dengan teman dalam kelompoknya.
- Guru meminta siswa bertanya apabila ada kesulitan dalam mengerjakan.

Menalar

- Guru meminta masing-masing siswa dalam setiap kelompok untuk menuliskan dengan bahasa sendiri tentang rumus permutasi n unsur dengan beberapa unsur yang sama.

Jawaban yang diharapkan dari siswa:

Banyak permutasi n unsur yang terdiri dari n_1 unsur jenis pertama, n_2 unsur jenis kedua, n_3 unsur jenis ketiga, ..., n_k unsur jenis ke-k ($n = n_1 + n_2 + r_3 + ... + n_k$) adalah

$$\frac{n!}{n_1! \,.\, n_2! \,.\, n_3! \ldots n_k!}.$$

Mengomunikasikan

- Guru meminta siswa berkelompok 3 – 4 orang perkelompok untuk membuat 4 soal penerapan permutasi dengan beberapa unsur yang sama beserta jawabannya
- Guru berkeliling kelas untuk membantu siswa yang mengalami kesulitan dalam membuat soal dan penyelesaiannya.
- Selanjutnya guru meminta (mengatur) kelompok untuk saling menukar soal yang telah dibuat untuk dikerjakan oleh kelompok lainnya.
- Selanjutnya guru meminta kelompok yang memberi soal untuk mengoreksi pekerjaan kelompok yang mengerjakan soal.
- Guru berkeliling kelas untuk membantu kelompok yang mengalami permasalahan, misalnya terjadi ketidaksamaan antar kelompok dalam menyelesaikan soal.

Kegiatan Penutup

Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut.

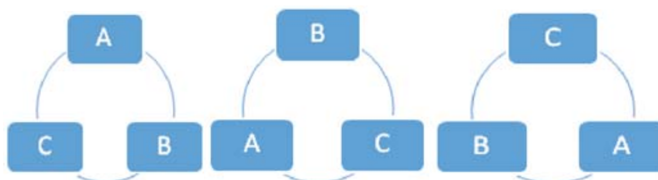
Kegiatan Belajar 3.1.6 Menentukan Rumus Permutasi Siklis dan Penerapannya

Kegiatan Pendahuluan

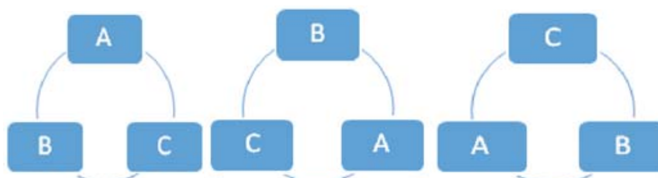
- Guru mengingatkan kembali pertemuan sebelumnya tentang permutasi n unsur, yaitu $P(n, n) = n!$ di mana n unsur yang diketahui adalah semuanya berbeda dan susunannya dalam bentuk mendatar. Sebagai contoh, apabila kita ingin menyusun 3 unsur A, B, C, maka susunannya sebanyak 3! = 6 yaitu:

A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

- Selanjutnya guru bertanya ke siswa tentang bentuk susunan yang lain, misalnya melingkar, apakah banyak susunannya tidak berubah?
- Guru memberikan ilustrasi sususun secara melingkar untuk 3 unsur A, B, C seperti pada buku siswa, yaitu walaupun ketiga susunan berikut nampak berbeda, namun jika dilihat dari urutan (searah jarum jam misalnya) maka ketiga susunan ini adalah sama.



Demikian juga untuk ketiga susunan berikut adalah sama.



Penyusunan unsur-unsur dalam bentuk melingkar ini disebut permutasi siklis (*circular permutation*).

- Guru menjelaskan tujuan untuk pertemuan kali ini, yaitu untuk menurunkan rumus untuk permutasi siklis (melingkar) n unsur beserta penerapannya dalam permasalahan sehari-hari.

Kegiatan Inti

Mengamati

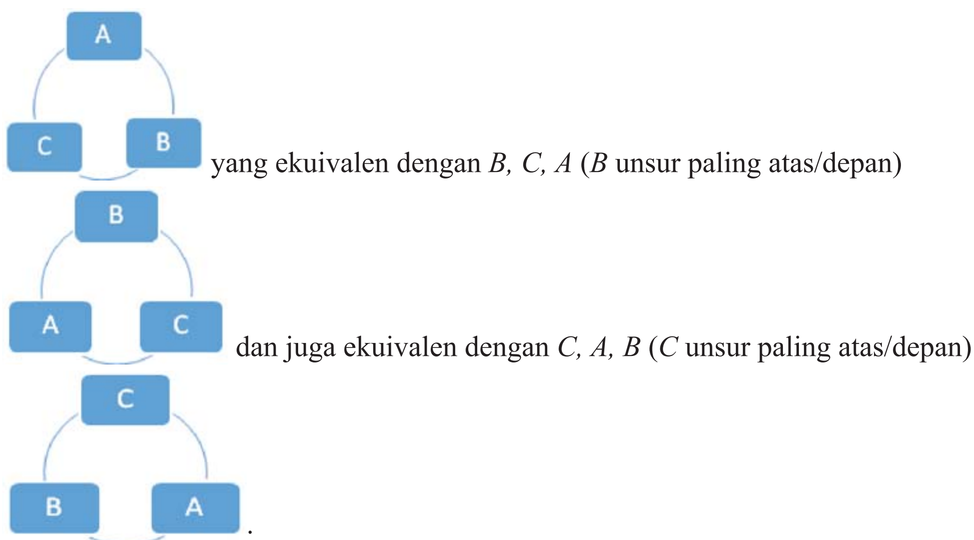
- Guru meminta siswa untuk berdiskusi dengan teman sebangkunya (sebelahnya) untuk mengamati contoh-contoh beserta penyelesaiannya yang berkenaan dengan penurunan rumus permutasi siklis n unsur seperti pada buku siswa, yaitu:

Contoh 3.1.12

Tentukan banyak permutasi siklis dari A, B, C.

Penyelesaian.

Salah satu susunan permutasi siklis adalah A, B, C (A unsur paling atas/depan).



Akan tetapi ketiga permutasi siklis di atas, apabila dinyatakan dalam permutasi mendatar maka susunannya berbeda, yaitu

A, B, C

B, C, A

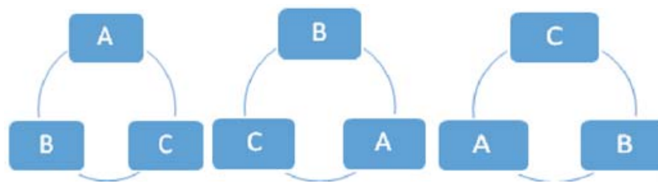
C, A, B

Demikian juga untuk ketiga susunan berikut adalah sama, tetapi kalau dinyatakan dalam permutasi mendatar menjadi berbeda, yaitu

A, C, B

B, A, C

C, B, A



Ini berarti 1 susunan permutasi siklis berkorespondensi dengan 3 susunan permutasi mendatar.

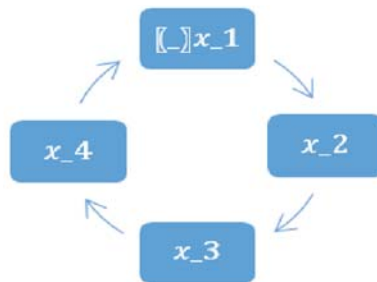
Jadi, karena banyaknya permutasi (mendatar) dari 3 unsur A, B, C adalah $3! = 6$ cara, sedangkan setiap 3 susunan permutasi mendatar berkorespondensi dengan 1 susunan permutasi siklis, maka banyak permutasi siklis untuk 3 unsur adalah $\frac{3!}{3} = 2! = 2$ cara.

Contoh 3.1.13

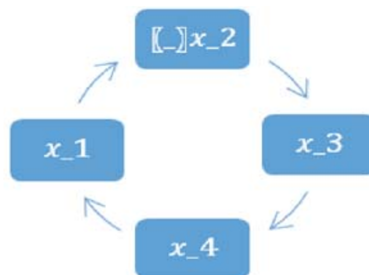
Tentukan banyak permutasi siklis dari 4 unsur.

Penyelesaian.

Misalkan 4 unsur itu diberi nama x_1, x_2, x_3, x_4. Maka salah satu susunan permutasi siklis adalah dengan urutan x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 unsur paling atas/depan).

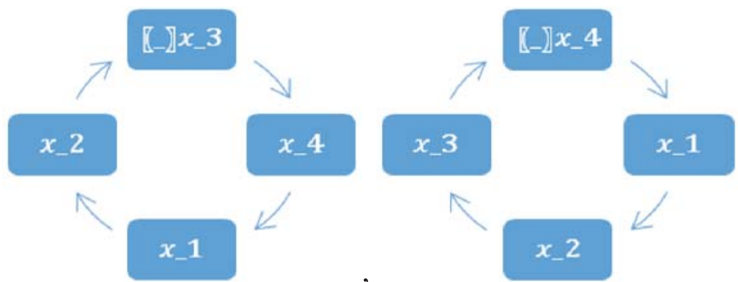


Dengan meletakkan unsur paling atas/depan x_2 dan urutannya seperti di atas, yaitu x_2, x_3, x_4, x_1, maka susunannya menjadi



yang ekuivalen dengan susunan sebelumnya.

Demikian juga dengan urutan sama, tetapi unsur paling atas/depan x_3 (x_3, x_4, x_1, x_2) dan x_4 (x_4, x_1, x_2, x_3) , maka susunannya berturut-turut adalah



, ,

yang juga ekuivalen dengan susunan pertama x_1, x_2, x_3, x_4.

Dengan demikian keempat susunan di atas ekuivalen.

Akan tetapi keempat permutasi siklis di atas, apabila dinyatakan dalam permutasi mendatar maka susunannya berbeda yaitu

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

$$x_2, x_3, x_4, x_1$$

$$x_3, x_4, x_1, x_2$$

$$x_4, x_1, x_2, x_3,$$

Ini berarti 1 susunan permutasi siklis berkorespondensi dengan 4 susunan permutasi mendatar.

Demikian juga untuk permutasi siklis yang lain misalnya

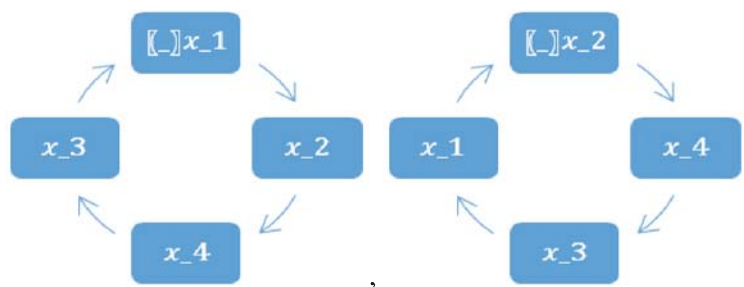
x_1, x_2, x_4, x_3 akan berkorespondensi dengan 4 permutasi datar dengan meletakkan unsur paling depan x_1, x_2, x_4, dan x_3 tetapi dalam urutan yang sama, yaitu

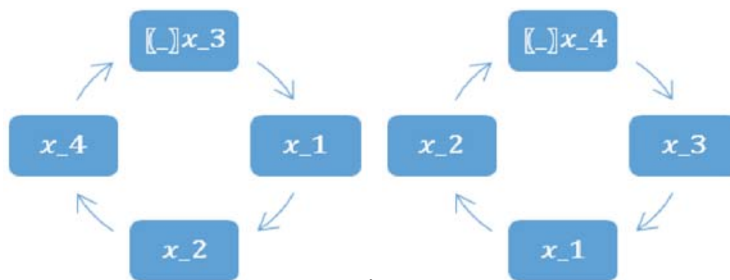
$$x_1, x_2, x_4, x_3$$

$$x_2, x_4, x_3, x_1$$

$$x_3, x_1, x_2, x_4$$

$$x_4, x_3, x_1, x_2,$$





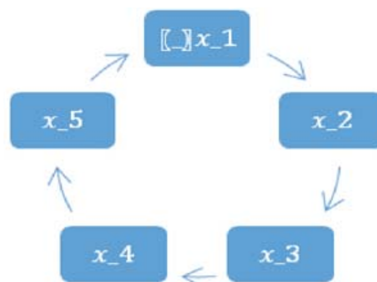
Jadi, karena banyaknya permutasi (mendatar) dari 4 unsur adalah 4! = 24 cara, sedangkan setiap 4 susunan permutasi mendatar berkorespondensi dengan 1 susunan permutasi siklis, maka banyak permutasi siklis untuk 4 unsur adalah $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ cara.

Contoh 3.1.14

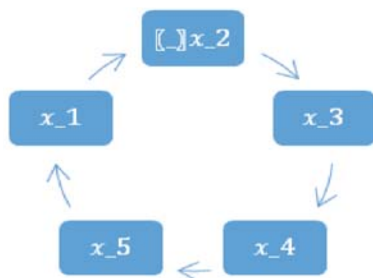
Tentukan banyak permutasi siklis dari 5 unsur.

Penyelesaian.

Misalkan 5 unsur itu diberi nama x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Maka salah satu susunan permutasi siklis adalah dengan urutan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (x_1 unsur paling atas/depan).

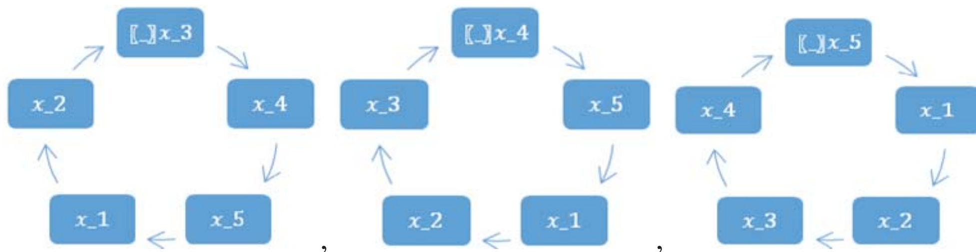


Dengan meletakkan unsur paling atas/depan x_2 dan urutannya seperti di atas, yaitu x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, maka susunannya menjadi



yang ekuivalen dengan susunan sebelumnya.

Demikian juga dengan urutan sama, tetapi unsur paling atas/depan x_3 (x_3, x_4, x_5, x_1, x_2), x_4 (x_4, x_5, x_1, x_2, x_3), dan x_5 (x_5, x_1, x_2, x_3, x_4) maka susunannya berturut-turut adalah



yang juga ekuivalen dengan susunan pertama x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Dengan demikian kelima susunan di atas ekuivalen.

Akan tetapi kelima permutasi siklis di atas, apabila dinyatakan dalam permutasi mendatar maka susunannya berbeda yaitu

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

$$x_2, x_3, x_4, x_5, x_1$$

$$x_3, x_4, x_5, x_1, x_2$$

$$x_4, x_5, x_1, x_2, x_3$$

$$x_5, x_1, x_2, x_3, x_4,$$

Ini berarti 1 sususan permutasi siklis berkorespondensi dengan 5 susunan permutasi mendatar.

Demikian juga untuk permutasi siklis yang lain x_1, x_2, x_3, x_5, x_4 akan berkorespondensi dengan 5 permutasi datar dengan meletakkan unsur paling depan x_1, x_2, x_3, x_5, dan x_4 tetapi dalam urutan yang sama, yaitu

$$x_1, x_2, x_3, x_5, x_4$$

$$x_2, x_3, x_5, x_4, x_1$$

$$x_3, x_5, x_4, x_1, x_2$$

$$x_5, x_4, x_1, x_2, x_3$$

$$x_4, x_1, x_2, x_3, x_5$$

Jadi, karena banyaknya permutasi (mendatar) dari 5 unsur adalah 5! = 120 cara, sedangkan setiap 5 susunan permutasi mendatar berkorespondensi dengan 1 susunan permutasi siklis, maka banyak permutasi siklis untuk 5 unsur adalah $\frac{5!}{5} = 4! = 24$ cara.

Menanya

- Guru meminta siswa dalam kelompok mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait contoh-contoh yang telah diamati berhubungan dengan penurunan rumus permutasi siklis n unsur.
- Guru mengingatkan contoh pertanyaan yang bisa digunakan seperti yang terdapat pada buku siswa.

Pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa minimal:

Bagaimana memperoleh rumus umum untuk masalah permutasi siklis n unsur?

Menggali Informasi

- Guru meminta masing-masing siswa untuk membaca informasi yang ada dalam buku siswa terkait dengan penjelasan menurunkan rumus untuk banyak permutasi siklis n unsur, kemudian didiskusikan dengan teman dalam kelompoknya.
- Guru meminta siswa bertanya apabila ada kesulitan dalam mengerjakan.

Menalar

Guru meminta masing-masing siswa dalam setiap kelompok untuk menuliskan dengan bahasa sendiri tentang rumus permutasi siklis n unsur.

Jawaban yang diharapkan dari siswa:

Banyak permutasi siklis untuk n unsur adalah $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ cara.

Mengomunikasikan

- Guru meminta siswa berkelompok 3–4 orang perkelompok untuk membuat 4 soal penerapan permutasi dengan beberapa unsur yang sama beserta jawabannya
- Guru berkeliling kelas untuk membantu siswa yang mengalami kesulitan dalam membuat soal dan penyelesaiannya.
- Selanjutnya guru meminta (mengatur) kelompok untuk saling menukar soal yang telah dibuat untuk dikerjakan oleh kelompok lainnya.
- Selanjutnya guru meminta kelompok yang memberi soal untuk mengoreksi pekerjaan kelompok yang mengerjakan soal.
- Guru berkeliling kelas untuk membantu kelompok yang mengalami permasalah, misalnya terjadi ketidaksamaan antar kelompok dalam menyelesaikan soal.

Kegiatan Penutup

Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut.

Latihan Soal 4.1

1. Pada satu kelas terdapat 24 siswa wanita dan 16 siswa pria. Apabila akan dipilih satu siswa untuk mengikuti lomba mewakili kelas tersebut, berapa banyak cara yang dapat di lakukan.

   Jawab:

   Banyak cara memilih satu siswa adalah 24 + 16 = 40 cara.

2. Amir harus mengerjakan hal-hal berikut selama istirahat makan siang yaitu makan siang, pergi ke kantor pos, pergi ke bank, dan membeli surat kabar. Tentukan banyaknya cara Amir mengerjakan hal-hal tersebut.

   Jawab:

   Banyaknya cara Amir mengerjakan hal-hal tersebut = 4 x 3 x 2 x 1 = 24.

3. Tentukan nilai n pada persamaan $P\,(n + 1,3) = P\,(n, 4)$.

   Jawab: Dengan menggunakan definisi $P(n, r)$ $P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, diperoleh

$$P(n + 1,3) = P(n, 4) \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$$

$$n + 1 = (n-2)(n-3)$$

$$n^2 - 6n - 5 = 0$$

$$(n-5)(n-1) = 0$$

$n = 5$ atau $n = 1$ (tidak memenuhi)

Jadi, $n = 5$.

4. Diberikan angka-angka 2, 3, 5, 6, 7, dan 8. Dari angka-angka tersebut akan dibentuk bilangan yang terdiri atas tiga angka. Jika tidak boleh terjadi pengulangan angka,

   a. tentukan banyaknya bilangan yang bisa diperoleh,
   b. tentukan banyaknya bilangan genap yang bisa diperoleh,
   c. tentukan banyaknya bilangan ganjil yang bisa diperoleh,
   d. tentukan banyaknya bilangan kelipatan 5 yang bisa diperoleh,
   e. tentukan banyaknya bilangan kurang dari 400 yang bisa diperoleh.

   Jawab :

   a. Banyaknya bilangan yang bisa diperoleh = $6 \times 5 \times 4 = 120$.
   b. Banyaknya bilangan genap yang bisa diperoleh = $5 \times 4 \times 3 = 60$ (kemungkinan untuk angka satuan adalah 2, 6, dan 8).
   c. Banyaknya bilangan ganjil yang bisa diperoleh = $120 – 60 = 60$.
   d. Banyaknya bilangan kelipatan 5 yang bisa diperoleh = $5 \times 4 \times 1 = 20$ (kemungkinan untuk angka satuan adalah 5).
   e. Banyaknya bilangan kurang dari 400 yang bisa diperoleh = $2 \times 5 \times 4 = 40$ (kemungkinan untuk angka ratusan adalah 2 dan 3).

5. Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf A, B, C, D, E, F, G, dan H yang memuat

   a. susunan BCD ,
   b. susunan $CFGA$,
   c. susunan BA atau GA,
   d. susunan ABC atau DE,
   e. susunan ABC atau CDE,
   f. susunan CBA atau BED.

   Jawab:

   a. Susunan permutasinya berbentuk (BCD) $AEFGH$. Jadi ada $6! = 720$ susunan.
   b. Susunan permutasinya berbentuk ($CFGA$) $BDEH$. Jadi ada $5! = 120$ susunan.

c. Susunan permutasinya berbentuk $(BA)\ CDEFGH$ atau $(GA)\ BCDEFH$.

   Jadi ada 7! + 7! = 10.080 susunan.

d. Susunan permutasinya berbentuk $(ABC)\ DEFGH$ atau $(DE)\ ABCFGH$.

   Jadi ada 6! + 7! = 5.760 susunan.

e. Susunan permutasinya berbentuk $(ABC)\ DEFGH$ atau $(CDE)\ ABFGH$.

   Jadi ada 6! + 6! = 1.440 susunan.

f. Susunan permutasinya berbentuk $(CAB)\ DEFGH$ atau $(BED)\ ACFGH$.

   Jadi ada 6! + 6! = 1.440 susunan.

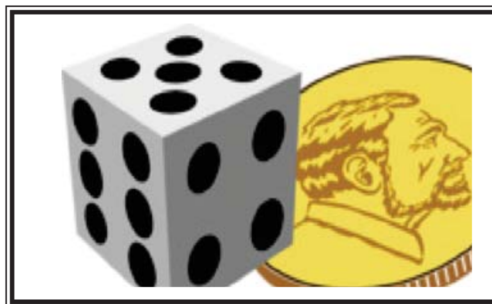
Subbab 3.2 Kejadian Majemuk, Peluang Saling Lepas, Peluang Saling Bebas, dan Peluang Bersyarat

Kegiatan Belajar 3.2.1 Kejadian Majemuk

Mengamati

Guru meminta siswa untuk menyebutkan peristiwa pada kehidupan sehari-hari yang di dalamnya terdapat kegiatan pelemparan koin atau pelantunan dadu.

Guru meminta siswa untuk mengamati Gambar 4.2.1 merupakan gambar munculnya sisi gambar pada koin dan mata 5 pada dadu.



Istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan

Kejadian Kejadian majemuk

Menanya

Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait dengan gambar yang disajikan dan atau meminta siswa membuat kesimpulan yang terkait dengan hasil pengamatannya.

Guru membantu siswa untuk bersikap teliti dan kritis terhadap pengamatan gambar dan membaca keterangan yang disajikan.

Guru bisa meminta siswa melakukan percobaan pelemparan sebuah koin dan pelantunan sebuah dadu untuk lebih memahami tentang materi kejadian majemuk yang akan dipelajari.

Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan diperoleh pada kotak yang disediakan.

Guru mencatat/mendata semua pertanyaan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian dipilih dengan diskusi kelas untuk dijadikan acuan kegiatan berikutnya, pertanyaan yang dipilih yang terkait kriteria kejadian majemuk, seperti:

Apa saja percobaan yang dapat memunculkan kejadian majemuk?

Bagaimana cara menentukan kejadian majemuk?

Ayo, Menanya

Setelah Anda mengamati gambar sebuah koin dan sebuah dadu di atas, kira-kira apa pertanyaan yang akan Anda kemukakan agar dapat mendefinisikan kejadian majemuk? Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak di bawah ini!

Menggali Informasi

Guru meminta siswa melengkapi kegiatan-kegiatan untuk mendapatkan informasi tentang materi kejadian majemuk serta membimbing siswa dalam melengkapi kegiatan-kegiatan apabila menghadapi kesulitan.

Petunjuk Jawaban

Contoh 3.2.1

Ardi memiliki sebuah wadah yang berisi bola terdiri dari bola putih, bola merah, dan bola hijau. Tentukan kejadian yang mungkin terjadi pada pengambilan dua bola dalam wadah tersebut!

Misal: P = Kejadian terambil bola putih

Q = Kejadian terambil bola merah

R = Kejadian terambil bola hijau

Kejadian I:

Kejadian terambilnya bola putih dan merah

Dinotasikan: $(P \cap Q)$

Kejadian II:

Kejadian terambilnya bola putih dan hijau

Dinotasikan: $(P \cap R)$

Kejadian III:

Kejadian terambilnya bola merah dan hijau

Dinotasikan: $(Q \cap R)$

Contoh 3.2.2

Pengunjung suatu toko elektronik diklasifikasikan berdasarkan jenis kelamin yaitu laki-laki dan perempuan serta berdasarkan usia kurang dari 35 tahun dan lebih dari 35 tahun. Tentukan kejadian majemuk yang mungkin terjadi!

Misal:

A = Kejadian pengunjung laki-laki

B = Kejadian pengunjung perempuan

C = Kejadian pengunjung berusia kurang dari 35 tahun

D = Kejadian pengunjung berusia lebih dari 35 tahun

Kejadian I:

Kejadian pengunjung toko laki-laki atau perempuan

Dinotasikan: $(A \cup B)$

Kejadian II:

Kejadian pengunjung toko berusia kurang dari 35 tahun atau lebih dari 35 tahun

Dinotasikan: $(C \cup D)$

Kejadian III:

Kejadian pengunjung toko laki-laki dan berusia kurang dari 35 tahun

Dinotasikan: $(A \cap C)$

Kejadian IV:

Kejadian pengunjung toko laki-laki dan berusia lebih dari 35 tahun

Dinotasikan: $(A \cap D)$

Kejadian V:

Kejadian pengunjung toko perempuan dan berusia kurang dari 35 tahun

Dinotasikan: $(B \cap C)$

Kejadian VI:

Kejadian pengunjung toko perempuan dan berusia lebih dari 35 tahun

Dinotasikan: $(B \cap D)$

Contoh 3.2.3

Perpustakaan sekolah memiliki koleksi 2 jenis buku yaitu buku pelajaran dan buku bacaan. Setiap siswa diperbolehkan paling banyak meminjam 2 buku. Kusuma akan meminjam buku di perpustakaan sekolah. Tentukan kejadian majemuk yang mungkin terjadi!

Misal:

U = Kejadian meminjam buku pelajaran

V = Kejadian meminjam buku bacaan

Kejadian I:

Kejadian Kusuma meminjam buku pelajaran atau buku bacaan

Dinotasikan: $(U \cup V)$

Kejadian II:

Kejadian Kusuma meminjam buku pelajaran dan buku bacaan

Dinotasikan: $(U \cap V)$

Menalar

Guru meminta siswa mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada kegiatan mengamati dan mengumpulkan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang dibuat oleh siswa pada kegiatan Ayo, Menanya.

Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati pada diskusi kelas untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan Ayo, Menanya pada kotak yang disediakan.

Ayo, Menalar

Tuliskan kesimpulan Anda tentang peluang kejadian majemuk berdasarkan jawaban dari kegiatan di atas pada kotak di bawah ini!

Kesimpulan yang diharapkan

Kejadian majemuk adalah dua atau lebih kejadian yang terjadi secara bersamaan.

Notasi gabungan dua kejadian: $(A \cup B)$

Notasi gabungan tiga kejadian: $(A \cup B \cup C)$

Notasi irisan dua kejadian: $(A \cap B)$

Notasi irisan tiga kejadian: $(A \cap B \cap C)$

Mengomunikasi

Guru meminta beberapa siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan Ayo, Menalar dengan kegiatan presentasi kelas, diskusi kelas, dan meminta siswa yang lain untuk bertanya atau memberi komentar terhadap hasil yang dipresentasikan. Hasil diskusi ditulis pada kotak yang disediakan.

Ayo, Mengomunikasikan

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap. Tuliskan hasil diskusi pada kotak di bawah ini!

Kegiatan Belajar 3.2.2 Peluang Saling Lepas

Mengamati

Guru meminta siswa untuk menyebutkan kejadian apa saja yang mungkin muncul pada pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan.

Guru meminta siswa untuk mengamati Gambar 4.2 pada halaman 8 yaitu tabel hasil pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan dan mencocokkan dengan hasil yang telah didapatkan.

Dadu 2 \ Dadu 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Guru menyebutkan salah satu kejadian saling lepas yang mungkin muncul pada pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan.

Misalkan A merupakan kejadian munculnya mata dadu berjumlah 2 dan B merupakan kejadian munculnya mata dadu berjumlah 3, maka peluang munculnya mata dadu berjumlah 2 atau 3 dapat didapat dengan cara:

Banyaknya sampel keseluruhan adalah 36

n (S) = 36

Sampel dari mata dadu yang berjumlah 2 ada 1, yaitu

A = {(1,1)}

Sampel dari mata dadu yang berjumlah 3 ada 2, yaitu

B = {(1,2), (2,1)}

Sehingga peluang munculnya mata dadu 2 atau 3 adalah

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36}$

$= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan

Kejadian saling lepas Peluang saling lepas

Menanya

Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait dengan gambar yang disajikan dan atau meminta siswa membuat kesimpulan yang terkait dengan hasil pengamatannya.

Guru membantu siswa untuk bersikap teliti dan kritis terhadap pengamatan gambar dan membaca keterangan yang disajikan.

Guru bisa meminta siswa melakukan percobaan pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan untuk lebih memahami tentang materi peluang saling lepas yang akan dipelajari.

Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan diperoleh pada kotak yang disediakan.

Guru mencatat/mendata semua pertanyaan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian dipilih dengan diskusi kelas untuk dijadikan acuan kegiatan berikutnya, pertanyaan yang dipilih yang terkait kriteria peluang saling lepas, seperti:

Apa saja percobaan yang dapat menghasilkan peluang saling lepas?

Bagaimana cara menentukan peluang saling lepas?

Ayo, Menanya

Setelah Anda mengamati Gambar 4.2, pertanyaan apa saja yang akan Anda kemukakan agar dapat mendefinisikan kejadian saling lepas dan menentukan rumus peluang saling lepas? Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak di bawah ini!

Menggali Informasi

Guru meminta siswa melengkapi kegiatan-kegiatan untuk mendapatkan informasi tentang materi peluang saling lepas serta membimbing siswa dalam melengkapi kegiatan-kegiatan apabila menghadapi kesulitan.

Petunjuk Jawaban

Contoh 3.2.4:

Dua dadu dilemparkan satu kali secara bersamaan. Tentukan peluang muncul mata dadu berjumlah 5 atau 7!

Misal:

A = Kejadian muncul mata dadu yang berjumlah 5

B = Kejadian muncul mata dadu yang berjumlah 7

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena munculnya mata dadu berjumlah 5 tidak mungkin bersamaan dengan munculnya mata dadu berjumlah 7.

Peluang dari kejadian munculnya mata dadu berjumlah 5 atau mata dadu berjumlah 7 didapat dengan cara:

Banyaknya sampel keseluruhan

n (S) = 36

Sampel dari mata dadu yang berjumlah 5

A = {(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}

Banyaknya sampel mata dadu yang berjumlah 5

n (A) = 4

Sampel dari mata dadu yang berjumlah 7

B = {(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}

Banyaknya sampel mata dadu yang berjumlah 7

n (B) = 6

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$$

$$= \frac{10}{36}$$

$$= \frac{5}{18}$$

Jadi peluang munculnya mata dadu berjumlah 5 atau mata dadu berjumlah 7 pada pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan adalah $\frac{5}{18}$.

Contoh 3.2.5:

Seorang manajer suatu perusahaan mengambil sebuah berkas lamaran pekerjaan secara acak untuk diperiksa dari lima belas berkas yang diajukan oleh 10 lulusan PTN dan 5 lulusan PTS. Para pelamar yang mengajukan terdapat 3 pelamar memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun, 7 pelamar memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun, dan 5 pelamar belum memiliki pengalaman kerja. Tentukan kejadian saling lepas yang mungkin terjadi dan hitunglah peluang dari kejadian saling lepas yang diperoleh!

Misal:

P = Kejadian pelamar lulusan PTN

Q = Kejadian pelamar lulusan PTS

R = Kejadian pelamar memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun

S = Kejadian pelamar memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun

T = Kejadian pelamar belum memiliki peengalaman kerja

Kejadian I:

Pelamar lulusan PTN atau lulusan PTS

Dinotasikan: $(P \cup Q)$

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena terpilihnya berkas pelamar lulusan PTN dengan pelamar lulusan PTS tidak mungkin terjadi pada waktu yang sama. Peluang dari kejadian terpilihnya berkas pelamar lulusan PTN atau lulusan PTS didapat dengan cara:

$$P(P \cup Q) = P(P) + P(Q)$$

$$= \frac{10}{15} + \frac{5}{15}$$

$$= \frac{15}{15}$$

$$= 1$$

Kejadian II:

Pelamar memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun atau lebih dari 2 tahun

Dinotasikan: $(R \cup S)$

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun dengan pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun tidak mungkin terjadi pada waktu yang sama. Peluang dari kejadian terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun atau pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun didapat dengan cara:

$$P(R \cup S) = P(R) + P(S)$$

$$= \frac{3}{15} + \frac{7}{15}$$

$$= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Kejadian III:

Pelamar memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun atau tidak memiliki pengalaman kerja

Dinotasikan: $(S \cup T)$

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun dengan pelamar yang tidak memiliki pengalaman kerja tidak mungkin terjadi pada waktu yang sama. Peluang dari kejadian terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun atau tidak memiliki pengalaman kerja didapat dengan cara:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

$$= \frac{7}{15} + \frac{5}{15}$$

$$= \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Kejadian IV:

Pelamar memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun atau tidak memiliki pengalaman kerja

Dinotasikan: $(R \cup T)$

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun dengan pelamar yang tidak memiliki pengalaman kerja tidak mungkin terjadi pada waktu yang sama. Peluang dari kejadian terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun atau tidak memiliki pengalaman kerja didapat dengan cara:

$$P(R \cup T) = P(R) + P(T)$$

$$= \frac{3}{15} + \frac{5}{15}$$

$$= \frac{8}{15}$$

Menalar

Guru meminta siswa mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada kegiatan mengamati dan mengumpulkan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang dibuat oleh siswa pada kegiatan Ayo, Menanya.

Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati pada diskusi kelas untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan Ayo, Menanya pada kotak yang disediakan.

Ayo, Menalar

Tuliskan kesimpulan Anda tentang peluang saling lepas dan rumus peluang saling lepas berdasarkan jawaban dari kegiatan di atas pada kotak di bawah ini!

Kesimpulan yang diharapkan

Peluang saling lepas adalah peluang dua atau lebih kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Mengomunikasi

Guru meminta beberapa siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan Ayo, Menalar dengan kegiatan presentasi kelas, diskusi kelas, dan meminta siswa yang lain untuk bertanya atau memberi komentar terhadap hasil yang dipresentasikan. Hasil diskusi ditulis pada kotak yang disediakan.

Ayo, Mengomunikasikan

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap. Tuliskan hasil diskusi pada kotak di bawah ini!

Kegiatan 3.2.3 Peluang Saling Bebas



Mengamati

Guru meminta siswa untuk menyebutkan kejadian apa saja yang mungkin terjadi pada pelantunan dua dadu secara bersamaan sebanyak satu kali.

Guru menyebutkan salah satu kejadian saling bebas berdasarkan Gambar 4.2.3 yang telah diamati oleh siswa.

Ayo, Mengamati

Apabila Anda melempar dua dadu berwarna merah dan putih secara bersama-sama, tentukan peluang munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah dan mata dadu 5 pada dadu warna putih.

Penyelesaian

Misalkan

A = Kejadian munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah

B = Kejadian munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih

Kejadian ini merupakan kejadian saling bebas karena munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah tidak mempengaruhi kejadian munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih.

Peluang dari kejadian munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah dan mata dadu 5 pada dadu warna putih didapat dengan cara:

Banyaknya sampel keseluruhan

$n(S) = 36$

Sampel dari munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah

$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$

Banyaknya sampel munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah

n (A) = 6

Sampel dari munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih

B = {(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (5,6)}

Banyaknya sampel munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih

n (B) = 6

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)\ P(B) \\
&= \left(\frac{6}{36}\right)\left(\frac{6}{36}\right) \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

Jadi peluang munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah dan munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih pada pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan adalah $\frac{1}{36}$

Istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan

Kejadian saling bebas Peluang saling bebas

Menanya

Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait dengan gambar yang disajikan dan atau meminta siswa membuat kesimpulan yang terkait dengan hasil pengamatannya.

Guru membantu siswa untuk bersikap teliti dan kritis terhadap pengamatan gambar dan membaca keterangan yang disajikan.

Guru bisa meminta siswa melakukan percobaan pengambilan barang tertentu seperti penghapus sebanyak dua untuk lebih memahami tentang materi peluang saling bebas yang akan dipelajari.

Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan diperoleh pada kotak yang disediakan.

Guru mencatat/mendata semua pertanyaan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian dipilih dengan diskusi kelas untuk dijadikan acuan kegiatan berikutnya, pertanyaan yang dipilih yang terkait kriteria peluang saling bebas, seperti:

Apa saja percobaan yang dapat menghasilkan peluang saling bebas?

Bagaimana cara menentukan peluang saling bebas?

Ayo, Menanya

Setelah Anda melakukan pengamatan di atas, buat pertanyaan agar Anda dapat mendefinisikan peluang saling bebas. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

1. Kejadian-kejadian yang bagaimanakah dapat membentuk kejadian saling bebas?
2. Bagaimana menentukan peluang dari kejadian saling bebas?

Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak di bawah ini.

Menggali Informasi

Guru meminta siswa melengkapi kegiatan-kegiatan untuk mendapatkan informasi tentang materi peluang saling bebas serta membimbing siswa dalam melengkapi kegiatan-kegiatan apabila menghadapi kesulitan.

Petunjuk Jawaban

Contoh 3.2.6

Sebuah dadu dan sebuah koin dilantunkan secara bersamaan sebanyak satu kali, berapa peluang munculnya mata dadu genap (P) pada dadu dan munculnya gambar (G) pada koin?

Penyelesaian

Misalkan

P = Kejadian muncul mata dadu genap pada dadu

Q = Kejadian muncul gambar (G) pada koin

Kejadian ini merupakan kejadian saling bebas karena munculnya mata dadu genap (P) pada dadu tidak mempengaruhi kejadian munculnya gambar (G) pada koin.

Peluang dari kejadian munculnya mata dadu genap pada dadu dan gambar(G) pada koin didapat dengan cara:

Banyaknya sampel keseluruhan

n (S) = 12

Sampel dari munculnya mata dadu genap pada dadu

P = {(2, *A*), (2, *G*), (4, *A*), (4, *G*), (6, *A*), (6, *G*)}

Banyaknya sampel munculnya mata dadu genap pada dadu

n (P) = 6

Sampel dari munculnya Gambar (G) pada koin

Q = {(1, *G*), (2, *G*), (3, *G*), (4, *G*), (5, *G*), (6, *G*)}

Banyaknya sampel munculnya gambar (G) pada koin

n (Q) = 6

$$\begin{aligned} P(P \cap Q) &= P(P)\ P(Q) \\ &= \left(\frac{6}{12}\right)\left(\frac{6}{12}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Jadi peluang munculnya mata dadu genap (P) pada dadu dan munculnya gambar (G)

pada koin pada pelantunan sebuah dadu dan sebuah koin sebanyak satu kali secara bersamaan adalah $\frac{1}{4}$

Contoh 3.2.7

Dua dadu dilantunkan dua kali. Berapa peluangnya mendapat jumlah 7 dan 11 dalam dua kali lantunan?

Penyelesaian

Misalkan

Y_1 = Kejadian muncul jumlah 7 pada lantunan pertama

Y_2 =Kejadian muncul jumlah 7 pada lantunan kedua

Z_1 = Kejadian muncul jumlah 11 pada lantunan pertama

Z_2 = Kejadian muncul jumlah 11 pada lantunan kedua

Kejadian ini merupakan kejadian saling bebas karena kejadian munculnya jumlah 7 pada lantunan pertama dan munculnya jumlah 11 pada lantunan kedua saling bebas, begitu juga kejadian munculnya jumlah 11 pada lantunan pertama dan munculnya jumlah 7 pada lantunan kedua saling bebas. Peluang dari kejadian munculnya jumlah 7 dan 11 pada dua kali lantunan didapat dengan cara:

$$\begin{aligned} P\,[(Y_1 \cap Z_2) \cup (Z_1 \cap Y_2) &= P(Y_1)\ P(Z_2) + P(Y_2)\ P(Z_1) \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{18}\right) + \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{108} + \frac{1}{108} \\ &= \frac{1}{54} \end{aligned}$$

Jadi peluang munculnya jumlah 7 dan 11 pada dua kali lantunan adalah $\frac{1}{54}$

Menalar

Guru meminta siswa mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada kegiatan mengamati dan mengumpulkan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang dibuat oleh siswa pada kegiatan Ayo, Menanya.

Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati pada diskusi kelas untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan Ayo, Menanya pada kotak yang disediakan.

Ayo, Menalar

Tuliskan kesimpulan Anda tentang peluang saling bebas dan rumus peluang saling bebas berdasarkan jawaban dari kegiatan di atas pada kotak di bawah ini!

Kesimpulan yang diharapkan

Peluang saling bebas adalah peluang dua atau lebih kejadian yang tidak saling mempengaruhi.

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

Mengomunikasi

Guru meminta beberapa siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan Ayo, Menalar dengan kegiatan presentasi kelas, diskusi kelas, dan meminta siswa yang lain untuk bertanya atau memberi komentar terhadap hasil yang dipresentasikan. Hasil diskusi ditulis pada kotak yang disediakan.

Ayo, Mengomunikasikan

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap. Tuliskan hasil diskusi pada kotak di bawah ini!

Kegiatan 3.2.4 Peluang Bersyarat

Mengamati

Guru meminta siswa untuk menyebutkan kejadian apa saja yang mungkin muncul pada pengambilan dua kartu satu persatu dengan diberikan syarat tertentu.

Ayo, Mengamati

Apabila diambil dua kartu secara acak satu persatu tanpa pengembalian, peluang terambilnya keduanya kartu Heart didapat dengan cara:

Misal:

A = Kejadian terambilnya kartu Heart pada pengambilan pertama

B = Kejadian terambilnya kartu Heart pada pengambilan kedua

Kejadian terambilnya kartu Heart yang pertama mempengaruhi terambilnya kartu Heart yang kedua, sehingga peluang terambilnya keduanya kartu Heart adalah

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$$
$$= \left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)$$
$$= \frac{156}{2652} = \frac{3}{51}$$

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan

Kejadian bersyarat
Peluang bersyarat

Menanya

Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait dengan gambar yang disajikan dan atau meminta siswa membuat kesimpulan yang terkait dengan hasil pengamatannya.

Guru membantu siswa untuk bersikap teliti dan kritis terhadap pengamatan gambar dan membaca keterangan yang disajikan.

Guru bisa meminta siswa melakukan percobaan pengambilan kartu bridge untuk lebih memahami tentang materi peluang bersyarat yang akan dipelajari.

Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan diperoleh pada kotak yang disediakan.

Guru mencatat/mendata semua pertanyaan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian dipilih dengan diskusi kelas untuk dijadikan acuan kegiatan berikutnya, pertanyaan yang dipilih yang terkait kriteria peluang bersyarat, seperti:

Apa saja percobaan yang dapat menghasilkan peluang bersyarat?

Bagaimana cara menentukan peluang bersyarat?

Ayo, Menanya

Setelah Anda melakukan pengamatan di atas, buat pertanyaan agar Anda dapat mendefinisikan peluang bersyarat. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

1. Kejadian-kejadian yang bagaimanakah dapat membentuk kejadian bersyarat?
2. Bagaimana menentukan peluang dari kejadian bersyarat?

Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak di bawah ini.

Menggali Informasi

Guru meminta siswa melengkapi kegiatan-kegiatan untuk mendapatkan informasi tentang materi peluang bersyarat serta membimbing siswa dalam melengkapi kegiatan-kegiatan apabila menghadapi kesulitan.

Contoh 3.2.8

Sebuah kartu diambil dari satu set kartu remi. Berapa peluang bahwa kartu yang terambil lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10 berwarna merah?

Misal:
C = Kejadian terambilnya kartu yang berwarna merah
D = Kejadian terambilnya kartu yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10

Kejadian ini merupakan kejadian bersyarat karena terambilnya kartu yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10 merupakan kartu yang berwarna merah. Peluang dari kejadian terambilnya kartu yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10 yang berwarna merah didapat dengan cara:

$$P (C \cap D) = P (C)\ \ P(D|C)$$

$$= \left(\frac{26}{52}\right) \times \left(\frac{14}{26}\right)$$

$$= \frac{14}{52}$$

$$= \frac{7}{26}$$

Menalar

Guru meminta siswa mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada kegiatan mengamati dan mengumpulkan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang dibuat oleh siswa pada kegiatan Ayo, Menanya.

Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati pada diskusi kelas untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan Ayo, Menanya pada kotak yang disediakan.

Ayo, Menalar

Tuliskan kesimpulan Anda tentang peluang bersyarat dan rumus peluang bersyarat berdasarkan jawaban dari kegiatan di atas pada kotak di bawah ini!

Kesimpulan yang diharapkan

Peluang bersyarat adalah peluang dua kejadian yang saling bergantung apabila terjadi atau tidak terjadinya kejadian A akan mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B.

$$P(A|B) = \frac{P(P \cap B)}{P(B)}$$

Menggali Informasi

Guru meminta siswa melengkapi kegiatan-kegiatan untuk mendapatkan informasi yang digunakan dalam membandingkan agar dapat lebih memahami tentang peluang saling lepas, peluang saling bebas, dan peluang bersyarat.

Guru membimbing siswa dalam melengkapi kegiatan-kegiatan apabila menghadapi kesulitan.

Kegiatan 4.2.2.6

Formasi manajemen dari 200 orang eksekutif suatu perusahaan ditunjukkan sebagai berikut:

	Pria (P)	Wanita (W)
Eksekutif Puncak (EP)	18	2
Eksekutif Menengah (EM)	36	24
Eksekutif Bawah (EB)	24	96

a. Jika dari 200 eksekutif tersebut diambil secara acak seorang eksekutif, berapa peluang terpilih eksekutif pria atau eksekutif puncak?

Peluang terpilih eksekutif pria atau eksekutif puncak didapat dengan cara:

$$P(P \cup EP) = P(P) + P(EP) - P(P \cap EP)$$
$$= \frac{78}{200} + \frac{20}{200} - \frac{18}{200}$$
$$= \frac{80}{200}$$
$$= \frac{2}{5}$$

b. Dipilih 2 orang eksekutif secara acak, berapa peluangnya terpilih seorang eksekutif pria dan seorang eksekutif wanita?

Peluang terpilih seorang eksekutif pria dan seorang eksekutif wanita dari pemilihan secara acak dua orang eksekutif didapat dengan cara:

$$P(1P, 1W) = \frac{C_1^{78} C_1^{122}}{C_2^{200}}$$
$$= \frac{78.122}{\frac{200.199}{2}}$$
$$= \frac{2.379}{19.900}$$

c. Berapa peluang terpilih eksekutif pria pada pilihan pertama dan terpilih eksekutif pria lagi pada pilihan kedua?

Peluang terpilih eksekutif pria dari dua kali pemilihan berturut-turut didapat dengan cara:

$$
\begin{aligned}
P(P_1 \cap P_2) &= P(P_1)\, P(P2|P_1) \\
&= \left(\frac{78}{200}\right)\left(\frac{77}{199}\right) \\
&= \frac{6.006}{39.800} \\
&= \frac{15}{10}
\end{aligned}
$$

Mengomunikasi

Guru meminta beberapa siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan Ayo, Menalar dengan kegiatan presentasi kelas, diskusi kelas, dan meminta siswa yang lain untuk bertanya atau memberi komentar terhadap hasil yang dipresentasikan. Hasil diskusi ditulis pada kotak yang disediakan.

Ayo, Mengomunikasikan

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap. Tuliskan hasil diskusi pada kotak di bawah ini!

Latihan Soal 4.2

1. Sekelompok ahli biologi merencanakan akan mengadakan penelitian untuk mempelajari serangga yang membahayakan di Sulawesi Tenggara. A merupakan kejadian bahwa mereka akan menghadapi cuaca buruk, B merupakan kejadian bahwa mereka akan menghadapi masalah dengan lembaga pemerintahan

setempat, dan C merupakan kejadian bahwa mereka akan menghadapi kesulitan dengan alat-alat fotografi mereka. Tentukan 3 kejadian majemuk yang mungkin terjadi!

Alternatif Jawaban

Kejadian I

Mereka akan menghadapi cuaca buruk atau masalah dengan lembaga pemerintahan

Notasi: $(A \cup B)$

Kejadian II

Mereka akan menghadapi masalah dengan lembaga pemerintahan atau kesulitan dengan alat-alat fotografi

Notasi: $(B \cup C)$

Kejadian III

Mereka akan menghadapi cuaca buruk atau kesulitan dengan alat-alat fotografi

Notasi: $(A \cup C)$

Kejadian IV

Mereka akan menghadapi masalah dengan cuaca buruk atau masalah dengan lembaga pemerintahan atau kesulitan dengan alat-alat fotografi

Notasi: $(A \cup B \cup C)$

Kejadian V

Mereka akan menghadapi cuaca buruk dan masalah dengan lembaga pemerintahan

Notasi: $(A \cap B)$

Kejadian VI

Mereka akan menghadapi cuaca buruk dan kesulitan dengan alat-alat fotografi

Notasi: $(A \cap C)$

Kejadian VII

Mereka akan menghadapi masalah dengan lembaga pemerintahan dan kesulitan dengan alat-alat fotografi

Notasi: $(B \cap C)$

Kejadian VIII

Mereka akan menghadapi cuaca buruk dan masalah dengan lembaga pemerintahan dan kesulitan dengan alat-alat fotografi

Notasi: $(A \cap B \cap C)$

2. Sebuah kota memiliki satu unit kendaraan pemadam kebakaran dan satu unit kendaraan ambulance yang tersedia dalam keadaan darurat. Peluang bahwa unit kendaraan pemadam kebakaran siap apabila diperlukan adalah 0,98 dan peluang bahwa unit kendaraan ambulance siap apabila diperlukan adalah 0,92. Apabila terjadi peristiwa terbakarnya suatu gedung di kota tersebut, berapa peluang kedua kendaraan tersebut siap beroperasi?

Alternatif Jawaban

Misal:

K = Kejadian bahwa unit kendaraan pemadam kebakaran siap bila diperlukan

L = Kejadian bahwa unit kendaraan ambulance siap bila diperlukan

Peluang kedua kendaraan siap beroperasi didapat dengan cara:

$$\begin{aligned} P(K \cap L) &= P(K)\,P(L) \\ &= (0{,}98)\,(0{,}92) \\ &= 0{,}9016 \end{aligned}$$

Jadi, peluang kedua kendaraan siap beroperasi adalah 0,9016

3. Jika diketahui peluang bahwa Amir masih hidup 20 tahun lagi adalah 0,7 dan peluang bahwa Badu masih hidup 20 tahun lagi adalah 0,9, berapa peluang bahwa keduanya tidak hidup dalam 20 tahun lagi?

Alternatif Jawaban

Misal:

M = Kejadian Amir masih hidup 20 tahun lagi

N = Kejadian Badu masih hidup 20 tahun lagi

Peristiwa tidak terjadi dinyatakan dengan M’ dan N’

Peluang bahwa keduanya tidak hidup dalam 20 tahun lagi didapat dengan cara:

P (M') = 1 – P (M)
= 1 – 0,7
= 0,3

P (N') = 1 – P(N)
= 1 – 0,9
= 0,1

P (M' ∩ N') = P (M') P (N')
= (0,3) (0,1)
= 0,03

Jadi, peluang bahwa keduanya tidak hidup dalam 20 tahun lagi adalah 0,03

4. Sebuah tas berisi 15 spidol yang terdiri dari 8 spidol merah, 4 spidol biru, dan 3 spidol putih. Spidol pertama diambil secara acak dan tidak dikembalikan, selanjutnya diambil spidol kedua secara acak dan tidak dikembalikan.
   a. Hitunglah peluang apabila spidol yang terambil warna merah dan biru!
   b. Apabila spidol ketiga diambil secara acak, hitunglah peluang bahwa tidak satupun dari tiga spidol tersebut berwarna putih!

Alternatif Jawaban

Peluang apabila spidol yang terambil warna merah dan biru didapat dengan cara:

$$P\text{ (1 merah dan 1 biru)} = \left[\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{4}{14}\right)\right] + \left[\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{8}{14}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{32}{210}\right) + \left(\frac{32}{210}\right)$$

$$= \frac{64}{210}$$

$$= \frac{32}{105}$$

Jadi, peluang apabila spidol yang terambil warna merah dan biru adalah $\frac{32}{105}$

Peluang apabila ketiga spidol yang terambil tidak berwarna putih didapat dengan cara:

P (Ketiga spidol tidak berwarna putih)

= P (merah, merah, merah) + P (biru, merah, merah) + P (merah, biru, merah) + P (merah, merah, biru) + P (biru, biru, merah) + P (biru, merah, biru) + P (merah, biru, biru) + P (biru, biru, biru)

$$= \left[\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{7}{14}\right)\left(\frac{6}{13}\right)\right] + \left[\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{8}{14}\right)\left(\frac{7}{13}\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{7}{13}\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{7}{14}\right)\left(\frac{4}{13}\right)\right] +$$

$$\left[\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{3}{14}\right)\left(\frac{8}{13}\right)\right] + \left[\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{8}{14}\right)\left(\frac{3}{13}\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{3}{13}\right)\right] + \left[\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{3}{14}\right)\left(\frac{2}{13}\right)\right]$$

$$= \frac{1320}{2730}$$

$$= \frac{44}{91}$$

Jadi, peluang apabila ketiga spidol yang terambil tidak berwarna putih adalah $\frac{44}{91}$

5. Terdapat 50 lembar undian dengan nomor 1, 2, 3, …………………, 50, terdapat 3 nomor yang berisi hadiah. Apabila seorang panitia mengambil lembar undian dua kali berturut-turut, berapa peluang panitia tersebut akan mendapatkan lembar undian yang keduanya berisi hadiah?

Alternatif Jawaban

Misal:

H_1 = Kejadian mendapatkan lembar undian yang berisi hadiah pada pengambilan pertama

H_2 = Kejadian mendapatkan lembar undian yang berisi hadiah pada pengambilan kedua

Peluang panitia mendapatkan dua lembar undian yang berisi hadiah secara berturut-turut didapat dengan cara:

$P(H_1 \cap H_2) = P(H_1)\ P(H_2|H_1)$

$$= \left(\frac{3}{50}\right)\left(\frac{2}{49}\right)$$
$$= \frac{6}{2450}$$

Jadi, peluang panitia mendapatkan dua lembar undian yang berisi hadiah secara berturut-turut adalah $\frac{6}{2450}$



Uji Kompetensi 3

1. Dalam suatu kelas yang terdiri atas 15 siswa putri dan 12 siswa putra akan dipilih sepasang ganda campuran (putra dan putri) untuk mewakili kelas. Berapa banyak cara sepasang ganda campuran itu.

   Jawab:

   Memilih wakil putra ada 15 cara

   Memilih wakil putri ada 12 cara

   Karena memilih wakil putra dan putri adalah kejadian saling lepas, maka banyak banyak cara memilih sepasang putra dan putri adalah 15x12 = 180 cara

2. Ada berapa banyak susunan berbeda yang terdiri atas 3 huruf dari kata ABRACADABRA ?

   Jawab:

   Susunan dengan 3 huruf A ada 1 yaitu AAA.

   Susunan dengan 2 huruf A ada 4 x 3 = 12 yaitu AAB, ABA, BAA, AAR, ARA, RAA, AAC, ACA, CAA, AAD, ADA, DAA.

   Susunan dengan 1 huruf A ada 42 yaitu ABB (3 susunan), ARR (3 susunan), ABR (6 susunan), ABC (6 susunan), ABD (6 susunan), ARC (6 susunan), ARD (6 susunan), ACD (6 susunan).

Susunan tanpa huruf A ada 36 yaitu BBC (3 susunan), BBR (3 susunan), BBD (3 susunan), RRB (3 susunan), RRC (3 susunan), RRD (3 susunan), BRC (6 susunan), BRD (6 susunan), RCD (6 susunan).

Jadi, semuanya ada 91 susunan.

3. a. Tentukan banyaknya cara 3 orang duduk pada 4 kursi yang terletak sebaris.
   b. Tentukan banyaknya cara 5 orang duduk pada 5 kursi yang terletak sebaris.
   c. Ada 8 kursi yang disusun dalam 2 baris yaitu baris A dan baris B. Masing-masing baris terdiri atas 4 kursi. Tentukan banyaknya cara mengatur 8 orang untuk duduk jika 3 orang tertentu harus duduk di baris A.

   Jawab:

   a. Banyaknya cara = 24
   b. Banyaknya cara = 5! = 120.
   c. Banyaknya cara= 24 x 120 = 2.880.

4. Suatu rak buku memuat 7 buku berbeda yang terdiri atas 4 buku dikarang oleh Amir dan 3 buku dikarang oleh Hasan. Tentukan banyaknya susunan buku jika
   a. tidak ada dua buku dengan pengarang sama yang saling berdekatan,
   b. dua buku pertama di ujung kiri dikarang oleh pengarang yang sama,
   c. buku pertama di ujung kiri dan buku terakhir di ujung kanan dikarang oleh pengarang yang sama.

   Jawab:

   a. Posisi buku yang mungkin ádalah A1H1 A2H2 A3H3A4. Jadi, banyaknya susunan buku yang mungkin adalah $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$.
   b. Jika dua buku pertama di ujung kiri dikarang oleh Amir, maka banyaknya susunan buku yang mungkin adalah $4 \times 3 \times 5! = 1.440$.

      Jika dua buku pertama di ujung kiri dikarang oleh Hasan, maka banyaknya susunan buku yang mungkin adalah $3 \times 2 \times 5! = 720$.

      Jadi, banyaknya susunan buku yang mungkin adalah $1.440 + 720 = 2.160$.
   c. Cara dan jawaban sama dengan soal 8.b.

5. Dalam suatu pertemuan kecil yang dihadiri oleh 3 orang pria dan 3 orang wanita, mereka duduk dalam meja bundar.

   a. Berapa banyak cara mereka duduk.

   b. Berapa banyak cara mereka duduk apabila semua wanita duduk berdekatan

   c. Berapa banyak cara mereka duduk jika tidak ada dua wanita yang berdekatan.

   Jawab:

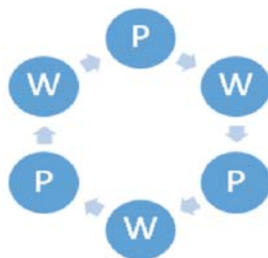
   a. Berapa banyak cara mereka duduk = $(3 + 3 - 1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

      $= 120$ cara.

   b. Karena semua wanita duduk berdekatan, maka pertama dianggap semua wanita adalah satu, sehingga banyak cara duduknya adalah $(1 + 3 - 1)! = 3! = 6$. Tetapi untuk 3 wanita itu terdapat $3! = 6$ cara duduknya.

      Jadi banyak cara mereka duduk apabila semua wanita duduk berdekatan $= 6 \times 6 = 36$.

   c. Karena tidak ada dua wanita yang duduk berdekatan, maka cara duduk mereka hanya ada satu model duduk yaitu



      Sedangkan banyak cara pria maupun wanita duduk masing-masing sebanyak 3!. Sehingga banyak cara mereka duduk jika tidak ada dua wanita yang berdekatan = 3!x3! = 36.

6. Suatu toko menjual 100 ban mobil yang terdiri dari 17 ban merk Uniroyal, 22 ban merk Goodyear, 3 ban merk General, 29 ban merk Continental, 21 ban merk Bridgestone, dan 8 ban merk Amstrong. Hitunglah peluang ban yang terjual:

   Ban mobil merk Goodyear atau Bridgestone

   Ban mobil merk Uniroyal, Continental, atau Bridgestone

Alternatif Jawaban

Misal:

A = Kejadian terjual ban mobil merk Uniroyal

B = Kejadian terjual ban mobil merk Goodyear

C = Kejadian terjual ban mobil merk General

D = Kejadian terjual ban mobil merk Continental

E = Kejadian terjual ban mobil merk Bridgestone

F = Kejadian terjual ban mobil merk Amstrong

Peluang yang terjual ban mobil merk Goodyear atau Bridgestone didapat dengan cara:

$$P(B \cup E) = P(B) + P(E)$$
$$= \frac{22}{100} + \frac{21}{100}$$
$$= \frac{43}{100}$$

Jadi, peluang yang terjual ban mobil merk Goodyear atau Bridgestone adalah $\frac{43}{100}$

Peluang yang terjual ban mobil merk Uniroyal, Continental, atau Bridgestone didapat dengan cara:

$$P(A \cup D \cup E) = P(A) + P(D) + P(E)$$
$$= \frac{17}{100} + \frac{29}{100} + \frac{21}{100}$$
$$= \frac{67}{100}$$

Jadi, peluang yang terjual ban mobil merk Uniroyal, Continental, atau Bridgestone adalah $\frac{67}{100}$

7. Sebuah dompet berisi 4 buah uang logam seribu rupiah dan 3 buah uang logam lima ratus rupiah. Dompet yang kedua berisi 3 buah uang logam seribu rupiah dan 5 buah uang logam lima ratus rupiah. Sebuah uang logam diambil dari dompet pertama dan dimasukkan pada dompet kedua. Jika kemudian diambil sekeping uang logam dari dompet kedua, berapa peluangnya bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua tersebut adalah uang logam lima ratus rupiah?

Alternatif Jawaban

Misal:

A_1 = Kejadian terambilnya uang logam seribu rupiah dari dompet pertama

B_1 = Kejadian terambilnya uang logam lima ratus rupiah dari dompet pertama

A_2 = Kejadian terambilnya uang logam seribu rupiah dari dompet kedua

B_2 = Kejadian terambilnya uang logam lima ratus rupiah dari dompet kedua

Peluang bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua merupakan uang logam lima ratus rupiah didapat dengan cara:

$P(A_1 \cap B_2) \cup P(B_1 \cap B_2)$

$= P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2)$

$= P(A_1)\, P(B_2|A_1) + P(B_1)\, P(B_2|B_1)$

$= \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) = \frac{20}{63} + \frac{18}{63} = \frac{38}{63}$

Jadi, Peluang bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua merupakan uang logam lima ratus rupiah adalah $\frac{38}{63}$

8. Diketahui bahwa kelas mata kuliah “Metodologi Riset” diikuti oleh 10 mahasiswa semester V, 30 mahasiswa semester VII, dan 10 mahasiswa semester IX. Hasil nilai akhir menunjukkan bahwa 3 mahasiswa semester V, 10 mahasiswa semester VII, dan 5 mahasiswa semester IX mendapatkan nilai A. Bila seorang mahasiswa dipilih secara acak diketahui mendapat nilai A, berapa peluang mahasiswa tersebut merupakan mahasiswa semester IX?

Alternatif Jawaban

Misal:

A = Kejadian mahasiswa mendapatkan nilai A

S_V = Kejadian mahasiswa semester V

S_{VII} = Kejadian mahasiswa semester VII

S_{IX} = Kejadian mahasiswa semester IX

Peluang seorang mahasiswa dipilih secara acak diketahui mendapat nilai A merupakan mahasiswa semester IX didapat dengan cara:

$$P(A) = P(S_V \cap A) + P(S_{VII} \cap A) + P(S_{IX} \cap A)$$

$$= P(S_V)\ P(A|S_V) + P(S_{VII})\ P(A|S_{VII}) + P(S_{IX})\ P(A|S_{IX})$$

$$P(S_{IX}|A) = \frac{P(S_{IX})\ P(A|S_{IX})}{P(S_V)P((A|S_V) + P(S_{VII})P((A|S_{VII}) + P(S_{IX})P((A|S_{IX})}$$

$$= \frac{\left(\frac{10}{50}\right)\left(\frac{5}{10}\right)}{\left(\frac{10}{50}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{30}{50}\right)\left(\frac{10}{30}\right) + \left(\frac{10}{50}\right)\left(\frac{5}{10}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{50}{500}\right)}{\left(\frac{50}{500}\right) + \left(\frac{300}{1500}\right) + \left(\frac{50}{500}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{50}{500}\right)}{\left(\frac{90}{1500}\right) + \left(\frac{300}{1500}\right) + \left(\frac{150}{1500}\right)}$$

$$= \frac{\frac{50}{500}}{\frac{540}{1500}}$$

$$= \left(\frac{50}{500}\right)\left(\frac{1500}{540}\right)$$

$$= \frac{75}{270} = 0{,}270$$

Jadi, Peluang seorang mahasiswa dipilih secara acak diketahui mendapat nilai A merupakan mahasiswa semester IX adalah 0,270

9. Pada suatu penelitian untuk mengetahui pengaruh merokok terhadap kesehatan paru-paru, telah diwawancarai sebanyak 120 orang. Berdasarkan hasil penelitian ini diketahui bahwa 20 orang tidak menghisap rokok dan dari yang menghisap rokok diketahui 75% mengidap penyakit paru-paru. Bagi yang tidak merokok diketahui bahwa yang mengidap penyakit paru-paru adalah 25%. Apabila secara acak dipilih seorang diantara mereka, berapa peluang:
   a. Diperoleh orang yang tidak merokok tetapi mengidap penyakit paru-paru
   b. Diperoleh orang yang merokok atau orang yang mengidap penyakit paru-paru
   c. Diperoleh orang yang tidak mengidap penyakit paru-paru dari orang yang tidak merokok

Alternatif Jawaban

	Merokok (M)	Tidak Merokok (TM)	Jumlah
Berpenyakit Paru-paru (BP)	75	5	80
Tidak berpenyakit paru-paru (TBP)	25	15	40
Jumlah	100	20	120

Peluang diperoleh orang yang tidak merokok tetapi mengidap penyakit paru-paru didapat dengan cara:

$$P(TM \cap BP) = P(TM)\ P(BP)$$

$$= \frac{5}{120}$$

Peluang diperoleh orang yang merokok atau orang yang mengidap penyakit paru-paru didapat dengan cara:

$$P(M \cup BP) = P(M) + P(BP) - P(M \cap BP)$$

$$= \frac{100}{120} + \frac{80}{120} - \frac{75}{120}$$

$$= \frac{180}{120} - \frac{75}{120}$$

$$= \frac{5}{120}$$

Jadi, peluang diperoleh orang yang merokok atau orang yang mengidap penyakit paru-paru adalah $\frac{105}{120}$

Peluang diperoleh orang yang tidak mengidap penyakit paru-paru dari orang yang tidak merokok didapat dengan cara:

$$P(BP|TM) = \frac{P(TM \cap TBP)}{P(TM)}$$

$$= \frac{\frac{15}{120}}{\frac{20}{120}}$$

$$= \left(\frac{15}{120}\right)\left(\frac{120}{20}\right)$$

$$= \frac{15}{20}$$

Jadi, peluang diperoleh orang yang tidak mengidap penyakit paru-paru dari orang yang tidak merokok adalah $\frac{15}{20}$

10. Pemain A dan B bermain catur 12 babak dimana 6 kali dimenangkan oleh pemain A, 4 kali dimenangkan oleh pemain B, dan 2 kali seri. Dalam pertandingan sebanyak 3 babak, hitunglah peluang apabila:

    Pemain A dan B menang bergantian

    Pemain B menang paling sedikit satu babak

Alternatif Jawaban

Misal:

A_1 = Kejadian pemain A menang pada babak 1

A_2 = Kejadian pemain A menang pada babak 2

A_3 = Kejadian pemain A menang pada babak 3

B_1 = Kejadian pemain B menang pada babak 1

B_2 = Kejadian pemain B menang pada babak 2

B_3 = Kejadian pemain B menang pada babak 3

Peluang bahwa pemain A dan B menang bergantian didapat dengan cara:

P (A dan B menang bergantian)

= P (A menang, B menang, A menang atau B menang, A menang, B menang)

$= P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3)$

$= P(A_1)\,P(B_2)\,P(A_3) + P(B_1)\,P(A_2)\,P(B_3)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{12} + \frac{1}{10}$

$= \frac{5}{36}$

Jadi, peluang bahwa pemain A dan B menang bergantian adalah $\frac{5}{36}$

Peluang bahwa B menang paling sedikit satu babak didapat dengan cara:

1 – P (B tidak menang pada babak 1, babak 2, dan babak 3)

$= 1 - P(B'_1 \cap B'_2 \cap B'_3)$

$= 1 - P(B'_1)\,P(B'_2)\,P(B'_3)$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{19}{27}$

Jadi, peluang bahwa B menang paling sedikit satu babak adalah $\frac{19}{27}$

BAB 4

KEKONGRUENAN DAN KESEBANGUNAN (PENGAYAAN)

A. Kompetensi Inti (KI) dan Kompetensi Dasar (KD)

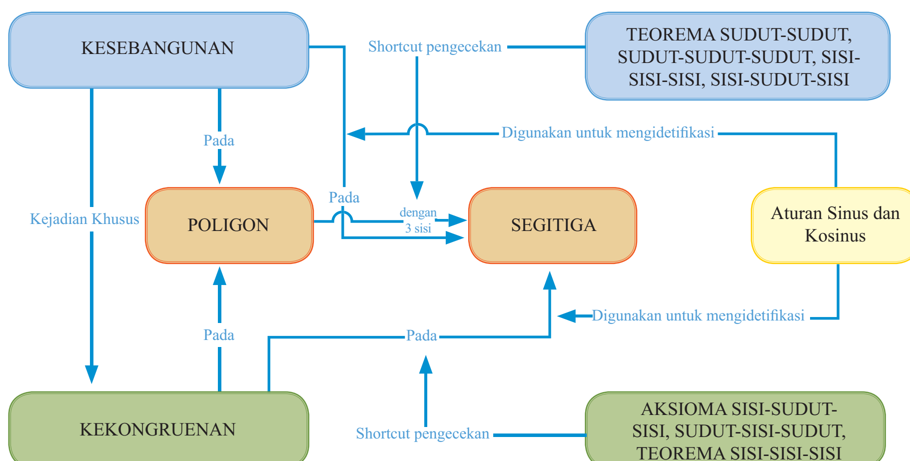
Kompetensi Inti (KI)	Kompetensi Dasar (KD)
1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2. Menunjukkan perilaku jujur, disiplin, tanggung-jawab, peduli (gotong royong, kerjasama, toleran, damai), santun, responsif dan proaktif sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta alam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia. 3. Memahami, menerapkan, menganalisis dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konsep-tual, prosedural berdasarkan rasa ingintahun-ya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesi-fik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah. 4. Mengolah, menalar, menyaji, dan mencipta dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, serta bertindak secara efektif dan kreatif dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.	3.5 Menganalisis hubungan kesebangunan dan kekongruenan antar bangun datar dengan menggunakan aturan sinus dan kosinus serta sifat-sifat transformasi geometri 4.5 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hubungan kesebangunan dan kekongruenan antar bangun datar dengan menggunakan aturan sinus dan kosinus serta sifat-sifat transformasi geometri

B. Tujuan Pembelajaran

Melalui aktivitas mengamati, mempertanyakan bahan amatannya, melakukan penyelidikan dan mengumpulkan informasi, mengasosiasi semua informasi yang diperoleh, dan mengomunikasin hasilnya baik dalam kelompok dan klasikal, siswa mampu:

1. Menganalisis kesebangunan bangun datar segitiga menggunakan aturan sinus dan kosinus
2. Menganalisis kesebangunan bangun datar segitiga menggunakan sifat-sifat transformasi
3. Menganalisis kekongruenan bangun datar segitiga menggunakan aturan sinus dan kosinus
4. Menganalisis kekongruenan bangun datar segitiga menggunakan sifat-sifat transformasi
5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hubungan kesebangunan antar bangun datar dengan menggunakan aturan sinus dan kosinus serta sifat-sifat transformasi geometri
6. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hubungan kekongruenan antar bangun datar dengan menggunakan aturan sinus dan kosinus serta sifat-sifat transformasi geometri

C. Diagram Alur Konsep



D. Proses Pembelajaran

Subbab 4.1 Kekongruenan

Kegiatan Pendahuluan

- Guru memotivasi siswa dengan meminta siswa membaca "Jalan pintas pengecekan kekongruenan segibanyak" di buku siswa dan meminta siswa mencoba menjawab pertanyaan dibagian akhir cerita tersebut.

Apakah ada jalan pintas untuk mengecek kekongruenan?

Seorang kontraktor bangunan baru saja mengangkat dua paket segitiga berukuran besar untuk menopang atap suatu aula pertunjukan. Sebelum Crane/penderek menggereknya pada tempat yang diinginkan, kontraktor tersebut butuh memastikan bahwa dua segitiga tersebut sama persis/kongruen. Haruskah kontraktor tersebut mengukur dan membandingkan semua bagian-bagian dari dua segitiga tersebut?



- Guru bersama siswa meriviu materi prasyarat kekongruenan dengan meminta siswa membaca dan menjawab pertanyaan pada kegiatan apersepsi.

Pembahasan

1. Apa yang bisa kalian simpulkan terkait dua ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ yang kongruen?

Jawaban:
ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ kongruen ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$), jika ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ mempunyai ukuran panjang sama $m\overline{AB} = m\overline{CD}$.

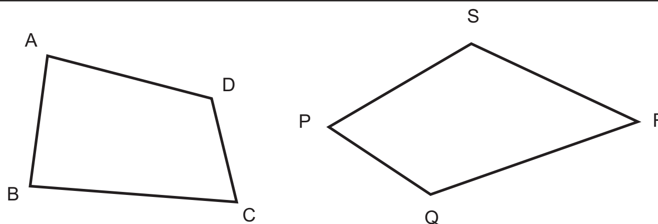
2. Apa yang bisa kalian simpulkan terkait dua sudut $\angle A$ dan $\angle B$ yang kongruen?

Jawaban:
Dua sudut $\angle A$ dan $\angle B$ kongruen ($\angle A \cong \angle B$), jika dua sudut $\angle A$ dan $\angle B$ mempunyai ukuran sama besar ($m\angle A = m\angle B$)

Kegiatan Inti

Kegiatan 4.1.1 Menentukan Pasangan Sisi dan Sudut yang Bersesuaian

- Guru meminta siswa mengumpulkan informasi dengan melakukan kegiatan belajar 1.1.1
- Selama siswa melakukan kegiatan 4.1.1, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.



Informasi:
- Terdapat korespondensi satu-satu antara bangun ***ABCD*** dan bangun ***PQRS*** atau ditulis ***ABCD***$\leftrightarrow$***PQRS***, dimana $A\leftrightarrow P$, $B\leftrightarrow Q$, $C\leftrightarrow R$, $D\leftrightarrow S$.
- Sisi $\overline{AB}$ dan sisi $\overline{PQ}$ adalah sisi-sisi yang bersesuaian/berkorespondensi.
- Sudut $\angle A$ dan sudut $\angle P$ adalah sudut-sudut yang bersesuaian/ berkorespondensi.

Untuk mengklarifikasi informasi yang diberikan diatas, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut:
1. Apakah banyaknya titik sudut dari pasangan bangun datar tersebut sama?
2. Tuliskan nama sisi dan sudut dari masing-masing bangun datar tersebut!
3. Apakah bisa dibuatkan korespondensi satu-satu (memasangkan satu-satu) masing-masing sisi dan sudut pada bangun ABCD ke bangun PQRS?

- Pada kegiatan mengamati ini, harapannya siswa menemukan dan menuliskan istilah-istilah matematika seperti segibanyak, korespondensi satu-satu, sisi, sudut, bersesuaian.

Menanya

- Berdasarkan istilah-istilah matematika yang ditemukan dan ditulis siswa, guru meminta siswa menuliskan pertanyaan terkait syarat dua segibanyak yang bisa dibuatkan korespondensi (terdapat korespondensi antara titik-titik sudutnya).
  Pertanyaan yang diharapkan muncul meliputi:
  1. Apa syarat dua segibanyak dapat dikatakan memiliki korespondensi antara titik-titik sudutnya?

2. Apa yang dimaksud dengan sisi-sisi yang bersesuaian/berkorespondensi?
3. Apa yang dimaksud dengan sudut-sudut yang bersesuaian/berkorespondensi?
4. Bagaimana menentukan sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian/berkorespondensi?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

- Dalam mencari informasi, guru bisa menyarankan siswa untuk mencari informasi tambahan terkait dua segibanyak yang bisa dibuatkan berkorespondensi dan menentukan sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian dengan mengakses internet atau mencari dari buku-buku referensi yang ada di perpustakaan atau yang dimiliki siswa.
- Selama siswa melakukan kegiatan mengumpulkan informasi, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan dan menjawab pertanyaan yang diberikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.

Untuk mengklarifikasi informasi yang diberikan di atas, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apakah banyaknya titik sudut dari pasangan bangun datar tersebut sama?
   Jawaban:
   iya, sama
2. Apakah bisa dibuatkan korespondensi satu-satu pada titik-titik sudutnya? Tuliskan titik-titik sudut yang berkorespondensi satu-satu
   Jawaban:
   Bisa, $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$, $D \leftrightarrow S$
3. Tuliskan nama sisi dan sudut dari masing-masing bangun datar tersebut!
   Jawaban:
   Pada segiempat ABCD, sisi-sisinya adalah $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ dan sudut-sudutnya adalah $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$. Dan pada segiempat PQRS, sisi-sisinya adalah $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$ dan sudut-sudutnya adalah $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$, $\angle S$
4. Apakah bisa dibuatkan korespondensi satu-satu (memasangkan satu-satu) masing-masing sisi dan sudut pada segiempat ABCD ke segiempat PQRS?
   Jawaban:
   Bisa dibuatkan korespondensi satu-satu, korespondensi satu-satu pada sisi yakni sisi $\overline{AB}$ dipasangkan dengan $\overline{PQ}$, sisi $\overline{BC}$ dipasangkan dengan $\overline{QR}$, sisi $\overline{CD}$ dipasangkan dengan $\overline{RS}$, sisi $\overline{DA}$ dipasangkan dengan $\overline{SP}$. Korespondensi satu-satu pada sudut yakni sudut $\angle A$ dipasangkan dengan $\angle P$, sudut $\angle B$ dipasangkan dengan $\angle Q$, sudut $\angle C$ dipasangkan dengan $\angle R$, sudut $\angle D$ dipasangkan dengan $\angle S$.

Petunjuk/Jawaban:

- Guru meminta siswa mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada kegiatan mengamati dan pengumpulan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi konjektur yang dibuat pada kegiatan menanya
- Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan menanya pada kolom yang disediakan

  Kesimpulan yang diharapkan:

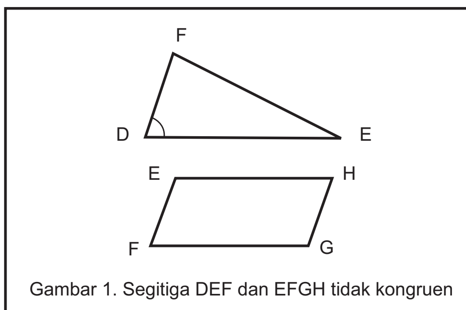
> - Sepasang bangun datar bisa dibuatkan korespondensi (terdapat korepondensi) jika bisa dibuatkan korespondensi satu-satu (pasangan satu-satu) antara titik-titik sudut pada sepasang bangun datar tersebut.
> - Dua Sudut yang bersesuaian adalah dua sudut yang titik-titik sudutnya adalah dua titik yang bersesuaian(berkorespondensi).
> - Dua sisi yang bersesuaian adalah dua sisi yang titik-titik pangkal sisi-sisinya adalah sepasang titik yang berkorespondensi.
> - Sisi-sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian ditulis dengan simbol ↔, misalkan sisi $\overline{AB}$ bersesuaian dengan sisi $\overline{PQ}$, ditulis $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$

Kegiatan 4.1.2: Kekongruenan Dua Bangun Datar Segibanyak

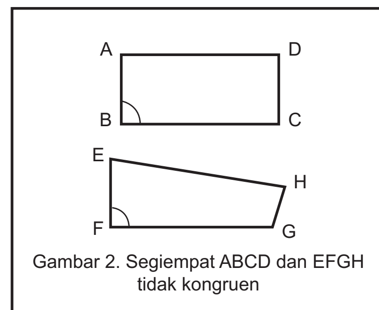
Mengamati

- Guru meminta siswa mengamati informasi yang disajikan di buku siswa tentang kesebangunan dua segibanyak.

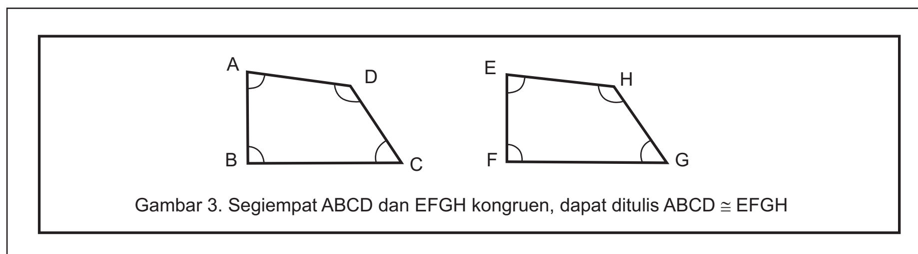
> **Ayo, Mengamati**
>
> Perhatikan sajian informasi berikut.



Gambar 1. Segitiga DEF dan EFGH tidak kongruen



Gambar 2. Segiempat ABCD dan EFGH tidak kongruen



Gambar 3. Segiempat ABCD dan EFGH kongruen, dapat ditulis ABCD ≅ EFGH

- Pada kegiatan mengamati ini, harapannya siswa menemukan dan menuliskan istilah-istilah matematika seperti segitiga, segiempat, kongruen, dan tidak kongruen.

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait informasi yang disajikan dan atau meminta siswa membuat konjektur terkait hasil amatannya terkait syarat dua segibanyak yang kongruen.
- Untuk mendukung kegiatan tersebut, guru membantu siswa teliti dan kritis terhadap informasi yang diamati/dibaca dengan cara mengarahkan fokus perhatian mereka pada istilah matematika yang ditemukan dan ditulis siswa dikaitkan dengan gambar pasangan bangun datar seperti bentuknya dan ukuran-ukuran dari unsur bangun datarnya.
- Guru bisa meminta siswa melakukan pengukuran pada unsur-unsur bangun datarnya dan membandingkan ukuran-ukuran tersebut antardua segibanyak tersebut.
- Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan maupun kesimpulan awal yang dia peroleh di kolom yang disediakan
- Guru mencatat/mendata semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian disepakati/dipilih secara bersama-sama untuk dijawab melalui kegiatan berikutnya.

Petunjuk:

Pertanyaan yang diharapkan muncul, meliputi:

1. Apa syarat dua bangun datar segibanyak kongruen?
2. Bagaimana cara menentukan dua bangun datar segibanyak kongruen atau tidak?
3. Bagaimana hubungan kekongruenan dengan ukuran-ukuran sudut dan sisi-sisinya?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

- Guru meminta siswa mengumpulkan informasi dengan melakukan kegiatan "Ayo, Mengumpulkan Informasi"
- Selama siswa melakukan kegiatan tersebut, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.

Petunjuk/Jawaban:

1. Apakah terdapat korespondensi antara dua bangun datar tersebut? Jika iya, sebutkan titik-titik sudut yang bersesuaian, semua pasangan sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian. Jika tidak, berikan alasannya.
   Jawaban:
   Gambar 1: tidak ada korespondensi satu-satu antara titik-titik sudutnya
   Gambar 2: terdapat korespondensi satu-satu
   Gambar 3: terdapat korespondensi satu-satu

2. Apakah semua sisi-sisi yang bersesuaian kongruen?
   Jawaban:
   Gambar 1: -
   Gambar 2: tidak semua sisi-sisi yang bersesuaian kongruen
   Gambar 3: semua sisi-sisi yang bersesuaian kongruen

3. Apakah semua sudut-sudut yang bersesuaian kongruen?
   Jawaban:
   Gambar 1: -
   Gambar 2: tidak semua sudut-sudut yang bersesuaian kongruen
   Gambar 3: semua sudut-sudut yang bersesuaian kongruen

- Guru meminta siswa mengkait-kaitkan semua informasi yang dia peroleh pada kegiatan mengamati dan pengumpulan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang siswa buat pada kegiatan menanya
- Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan menanya pada kolom yang disediakan

Mengomunikasikan

- Guru meminta salah satu kelompok/siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan menalar baik melalui kegiatan presentasi kelas, kunjung karya (siswa menuliskan kesimpulannya di kertas plano/kwarto, dipajang, dan meminta semua kelompok atau siswa memberi komentar pada masing-masing karya), atau karya kunjung (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, mengutus 2 anggota kelompok mempresentasikan pada kelompok yang lain, dan meminta kelompok yang lain tersebut bertanya atau memberi komentar pada karya yang dipresentasikan).

  Petunjuk:

> Dua segitiga dikatakan kongruen jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik sudut pada segitiga-segitiga tersebut dan memenuhi dua kondisi berikut:
> 1. Semua sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang (kongruen)
> 2. Semua sudut-sudut yang bersesuaian sama besar (kongruen)

Kegiatan Penutup

- Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut

Kegiatan 4.1.3: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga

Kegiatan Pendahuluan

- Guru bersama siswa meriviu materi tentang kriteria kekongruenan bangun datar dengan meminta salah satu siswa menyampaikan/menuliskan di papan tulis terkait kesimpulan pada kegiatan 4.1.2
- Guru memotivasi siswa dengan meminta siswa menampilkan beberapa gambar pasangan segitiga yang kongruen dan tidak kongruen.

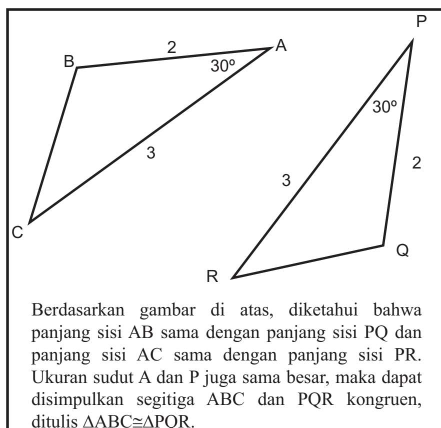
Kegiatan Inti

Mengamati

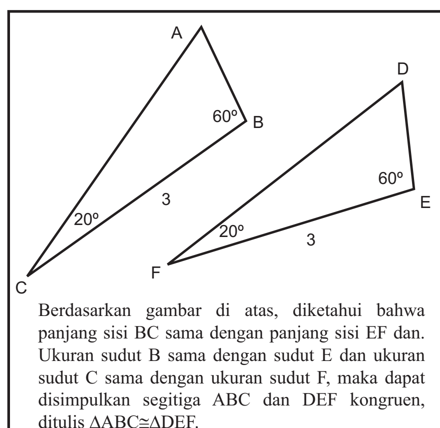
- Guru meminta siswa mengamati informasi yang disajikan di buku siswa tentang kekongruenan dua segitiga:

Ayo, Mengamati

Perhatikan informasi berikut:



Berdasarkan gambar di atas, diketahui bahwa panjang sisi AB sama dengan panjang sisi PQ dan panjang sisi AC sama dengan panjang sisi PR. Ukuran sudut A dan P juga sama besar, maka dapat disimpulkan segitiga ABC dan PQR kongruen, ditulis $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.



Berdasarkan gambar di atas, diketahui bahwa panjang sisi BC sama dengan panjang sisi EF dan. Ukuran sudut B sama dengan sudut E dan ukuran sudut C sama dengan ukuran sudut F, maka dapat disimpulkan segitiga ABC dan DEF kongruen, ditulis $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

- Pada kegiatan mengamati ini, harapannya siswa menemukan dan menuliskan istilah-istilah matematika seperti segitiga, sisi, sudut, kongruen.

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait informasi yang disajikan dan atau meminta siswa membuat konjektur terkait pertanyaan yang diajukan oleh temannya atau kelompok lainnya.
- Untuk mendukung kegiatan tersebut, guru membantu siswa teliti dan kritis terhadap informasi yang diamati/dibaca dengan cara mengarahkan fokus perhatian mereka pada istilah matematika (dicetak tebal dan miring) dikaitkan dengan gambar pasangan segitiga seperti bentuknya dan ukuran-ukuran dari unsur bangun datarnya.
- Guru bisa meminta siswa melakukan pengukuran pada unsur-unsur segitiga dan membandingkan ukuran-ukuran tersebut antar dua segitiga tersebut.
- Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan maupun kesimpulan awal yang dia peroleh di kolom yang disediakan
- Guru mencatat/mendata semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian disepakati/dipilih secara bersama-sama untuk diajawan melalui kegiatan berikutnya.

Petunjuk Kegiatan:

Pertanyaan yang diharapkan muncul, meliputi:
1. Apa syarat dua segitiga dikatakan kongruen?
2. Bagaimana cara menentukan dua segitiga kongruen atau tidak?
3. Apakah ada jalan pintas untuk mengecek kekongruenan dua segitiga (konjektur kekongruenan)?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

- Guru meminta siswa mengumpulkan informasi melalui:
  Kegiatan Penyelidikan 4.1.3.1:

  Petunjuk:

  Jika siswa kesulitan menggambar segitiga DEF pada langkah 2, guru bisa memberi bantuan/petunjuk dengan meminta siswa melakukan tahapan berikut:
  1. Menggambar garis DE dengan panjang sama panjang sisi AB.
  2. Dari titik D, gambar garis DF sehingga sudut D sama besar dengan sudut A dan panjang sisi DF sama panjang dengan sisi AC.
  3. Hubungkan titik E dan titik F, sehingga terbentuklah segitiga DEF.

  Kegiatan Penyelidikan 4.1.3.2:

  Petunjuk:

  1. Tentukan ukuran sisi yang belum diketahui pada masing-masing segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan aturan kosinus.
     Jawaban:
     - $a^2 = b^2 + c^2 – 2bc \cos A = 4^2 + 2^2 – 2.4.2.\cos 30 = 16 + 4 – 16.\cos 30 = 6{,}1436$. Jadi $a = \overline{BC} = 2.479$
     - $d^2 = e^2 + f^2 – 2ef \cos A = 4^2 + 2^2 – 2.4.2.\cos 30 = 16 + 4 – 16.\cos 30 = 6{,}1436$. Jadi $d = \overline{EF} = 2.479$

2. Tentukan ukuran dua sudut yang belum diketahui pada masing-masing segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan aturan kosinus
Jawaban:

- $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{BC} \cdot \overline{AB}} = \dfrac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \dfrac{-3}{12}$.

  Maka $\angle B = \arccos\left(\dfrac{-3}{12}\right) = 104{,}478°$

- $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{BC} \cdot \overline{AC}} = \dfrac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{21}{24}$.

  Maka $\angle C = \arccos\left(\dfrac{21}{24}\right) = 28{,}955°$

- $\cos E = \dfrac{d^2 + f^2 - e^2}{2df} = \dfrac{\overline{FE}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{DF}^2}{2\overline{EF} \cdot \overline{DE}} = \dfrac{6^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \dfrac{-12}{48}$.

  Maka $\angle E = \arccos\left(\dfrac{-12}{48}\right) = 104{,}478°$

- $\cos F = \dfrac{d^2 + e^2 - f^2}{2de} = \dfrac{\overline{FE}^2 + \overline{DF}^2 - \overline{DE}^2}{2\overline{FE} \cdot \overline{DF}} = \dfrac{6^2 + 8^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \dfrac{84}{96}$.

  Maka $\angle F = \arccos\left(\dfrac{21}{24}\right) = 28{,}955°$

3. Bandingkan ukuran semua sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian dari kedua segitiga tersebut. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.
Jawaban:
Ukuran semua sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian kongruen

Kegiatan Penyelidikan 4.1.3.3:

Petunjuk:

Jika siswa kesulitan menggambar segitiga DEF pada langkah 2, guru bisa memberi bantuan/petunjuk dengan meminta siswa melakukan tahapan berikut:

1. Gambar sudut D dengan ukuran sudut sama dengan ukuran sudut A
2. Tempatkan titik E pada salah satu kaki sudut D sehingga panjang ruas garis DE sama dengan panjang ruas garis AB
3. Tempatkan titik F pada kaki sudut D lainnya sehingga panjang ruas garis DF sama dengan panjang ruas garis AC.
4. Hubungkan titik E dan F, sehingga membentuk segitiga DEF.

Kegiatan Penyelidikan 4.1.3.4

1. Tentukan ukuran sisi yang belum diketahui pada tiap-tiap segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan aturan kosinus.
   Jawaban:
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

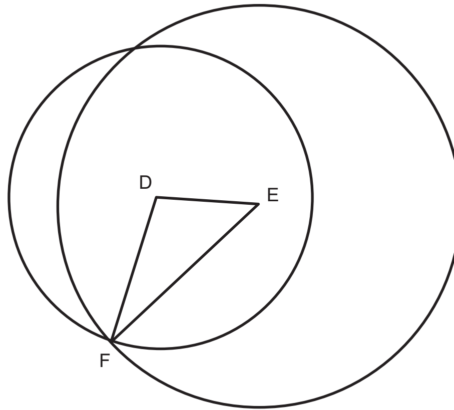
2. Tentukan ukuran sudut yang belum diketahui pada tiap-tiap segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan sifat ukuran sudut pada segitiga atau aturasn sinus.
   Jawaban:
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\cos 30 = 16 + 4 - 16.\cos 30 =$ 6,1436. Jadi a = 2.479
   $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ sehingga
   $\sin B = \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin 30}{\overline{BC}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{2.479} = 0.807.$
   Jadi $\angle B = 53{,}8039$

3. Bandingkan ukuran semua sudut-sudut yang bersesuaian dan sepasang sisi yang bersesuaian kedua segitiga tersebut. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.
   Jawaban:
   Semua sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian kongruen.

- Kesimpulan yang diharapkan adalah dua segitiga kongruen, jika dua pasang sudut-sudut yang bersesuaian sama besar/kongruen.

Kegiatan Penyelidikan 4.1.3.5

3. Semua ukuran sudut sama besar atau kongruen.



Kegiatan Penyelidikan 4.1.3.6

1. Tentukan ukuran ketiga sudut pada masing-masing segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan aturan kosinus.
   Jawaban:
   $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{16 + 4 - 9}{16} = \frac{11}{16}$$
   $$\text{Maka } \angle A = \text{arc cos}\left(\frac{11}{16}\right) = 46{,}567°$$
   Gunakan cara yang sama untuk menentukan sudut-sudut lainnya
2. Bandingkan ukuran semua sudut-sudut yang bersesuaian. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.
   Jawaban:
   Semua sudut-sudut yang bersesuaian kongruen

Kesimpulan yang diharapkan adalah dua segitiga kongruen, jika semua pasang sisi-sisi yang bersesuain sama besar/kongruen.

- Selama siswa melakukan kegiatan penyelidikan tersebut, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.
- Guru meminta siswa mengkait-kaitkan semua informasi yang dia peroleh pada kegiatan mengamati dan pengumpulan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang siswa buat pada kegiatan menanya.

Pembahasan

Masalah 4.1.1

Pentunjuk: berdasarkan konjektur kekongruenan Sisi-Sudut-Sisi, maka segitiga ΔABC dan segitiga ΔADE kongruen.

Masalah 4.1.2

a. Segitga EDR tidak kongruen dengan segitiga ULB, karena panjang ED dan UL bisa tidak kongruen

b. GIT dan NIA kongruen, konjektur sisi-sisi-sisi

c. SAT dan SAO kongruen, gunakan konjektur sisi-sudut-sisi

- Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan menanya pada kolom yang disediakan.

Mengomunikasi

- Guru meminta salah satu kelompok/siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan menalar baik melalui kegiatan presentasi kelas, kunjung karya (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, dipajang, dan meminta semua kelompok atau siswa memberi komentar pada masing-masing karya), atau karya kunjung (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, mengutus 2 anggota kelompok mempresentasikan pada kelompok yang lain, dan meminta kelompok yang lain tersebut bertanya atau memberi komentar pada karya yang dipresentasikan).

Petunjuk:

Kesimpulan yang diharapkan adalah

1. Jika dua sisi dari segitiga pertama sama panjang (kongruen) dengan dua sisi segitiga kedua dan sudut yang dibentuk oleh dua sisi tersebut kongruen maka dua segitiga tersebut kongruen.
   Selanjutnya ini disebut konjektur kekongruenan Sisi-Sudut-Sisi
2. Jika dua sudut dari segitiga pertama sama besar (kongruen) dengan dua sudut segitiga kedua dan satu sisi yang merupakan sinar/kaki dari sudut tersebut kongruen maka dua segitiga tersebut kongruen.
   Selanjutnya ini disebut konjektur kekongruenan Sudut-Sisi-Sudut
3. Jika semua sisi dari segitiga pertama sama panjang (kongruen) dengan dua sisi segitiga kedua maka dua segitiga tersebut kongruen.
   Selanjutnya ini disebut konjektur kekongruenan Sisi-Sisi-Sisi

Kegiatan Penutup

- Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut

Kegiatan 4.1.4: Alur/Flowchart Berpikir dalam Pembuktian Deduktif

Kegiatan Pendahuluan

- Guru bersama siswa meriviu materi tentang kriteria kekongruenan bangun datar dengan meminta salah satu siswa menyampaikan/menuliskan di papan tulis terkait kesimpulan pada kegiatan 4.1.3

Kegiatan Inti

Mengamati

- Guru meminta siswa mengamati informasi yang disajikan di buku siswa tentang contoh penyelesaian masalah terkait pembuktian deduktif:

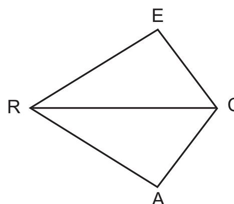
Ayo, Mengamati.

Perhatikan contoh penyelesaian masalah berikut:
Pada gambar berikut, EC ≅ AC, ER ≅ AR, apakah ∠E ≅ ∠A? Jika kongruen, tuliskan alur pembuktian untuk menjelaskan alasannya.

Penyelesaian:

Diketahui: EC ≅ AC dan ER ≅ AR

Tunjukkan: ∠E ≅ ∠A



Alur/flowchart pembuktian:



Pernyataan	Alasan
1. EC ≅ AC	1. Diketahui
2. ER ≅ AR	2. Diketahui
3. RC ≅ RC	3. Kesamaan garis (refleksif)
4. ΔRCE ≅ ΔRCA	4. Konjektur Kekongruenan Sisi-Sisi-Sisi
5. ∠E ≅ ∠A	5. Definisi Kekongruenan segibanyak

- Pada kegiatan mengamati ini, harapannya siswa menemukan dan menuliskan istilah-istilah matematika seperti alur/flowchart, dan pembuktian deduktif.

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait informasi yang disajikan dan atau meminta siswa membuat konjektur terkait pertanyaan yang diajukan oleh temannya atau kelompok lainnya.
- Untuk mendukung kegiatan tersebut, guru membantu siswa teliti dan kritis terhadap informasi yang diamati/dibaca dengan cara mengarahkan fokus perhatian mereka tahapan penyelesaiannya, penyusunan alur pembuktian dan penulisan bukti formalnya.
- Guru meminta mengingat kembali definisi kekongruenan yang dibahas sebelumnya serta konjektur kekongruenan yang siswa buat pada kegiatan sebelumnya.

- Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan maupun kesimpulan awal yang dia peroleh di kolom yang disediakan
- Guru mencatat/mendata semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian disepakati/dipilih secara bersama-sama untuk diajawan melalui kegiatan berikutnya.

Petunjuk

Pertanyaan yang diharapkan muncul, meliputi:
1. Bagaimna tahapan-tahapan penyelesaiannya atau pembuktiannya?
2. Bagaimana cara membuat alur/flowchart pembuktian?
3. Bagaimana cara menuliskan bukti formalnya agar sistematis/runtut?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

- Guru meminta siswa membaca dan memahami informasi tentang definisi unsur-unsur dalam segitiga, kekongruenan sudut dan sisi, serta definisi sudut-sudut bertolak belakang yang disajikan di buku siswa.
- Guru meminta siswa menyelesaikan masalah 1.1.3 dan 1.1.4 dengan melengkapi flowchart dan tabel bukti formal.

Masalah 4.1.3

Bukti formal:

Pernyataan	Alasan
1. $SE \cong SU$	1. Diketahui
2. $\angle E \cong \angle U$	2. Diketahui
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Sudut bertolakbelakang
4. $\Delta MSE \cong \Delta OSU$	4. Konjektur Kekongruenan Sudut-Sisi-Sudut
5. $MS \cong OS$	5. Definisi Kekongruenan Segibanyak

Masalah 4.1.4

Bukti formal:

Pernyataan	Alasan
1. I adalah titik tengah dari CM	1. Diketahui
2. I adalah titik tengah dari BL	2. Diketahui
3. $CI \cong IM$	3. Definisi titik tengah
4. $IL \cong IB$	4. Definisi titik tengah
5. $\angle 1 \cong \angle 2$	5. Sudut bertolak belakang
6. $\Delta ILC \cong \Delta MLB$	6. Konjektur Kekongruenan Sudut-Sisi-Sudut
7. $CL \cong MB$	7. Definisi Kekongruenan Segibanyak

- Untuk menambah pengalaman belajar siswa, guru meminta siswa secara berpasangan maupun berkelompok untuk menyelesaikan masalah 4.1.5 dan 4.1.6 dengan merancang alur/flowchart pembuktian terlebih dahulu sebelum merumuskan dalam tabel pembuktian.

Pembahasan

Masalah 4.1.5

- Penyelidikan dengan pengukuran:
  Guru meminta siswa mengikuti langkah-langkah menggambar sebagai berikut:
  1. Gambar segitiga sama kaki ABC dengan A sebagai titik puncak.
  2. Gambarkan titik D pada ruas garis BC, sehingga panjang BD=DC.
  3. Ukur sudut ADB dan sudut ADC. $\angle ADB = \angle ADC = 90°$, jadi ruas garis AD adalah garis tinggi
  4. Ukur sudut BAD dan sudut CAD. $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$, jadi ruas garis AD adalah garis bagi sudut.

- Bukti deduktif

Pernyataan	Alasan
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	1. Diketahui
2. $AD \cong \overline{AD}$	2. Ruas garis kongruen dengan dirinya sendiri (Sifat reflektif)
3. $\overline{BD} \cong \overline{CD}$	3. Definisi titik tengah (midpoint) garis
4. $\Delta BAD \cong \Delta CAD$	4. Konjektur Sisi-Sisi-Sisi
5. $\angle BAD \cong \angle CAD$	5. Definisi Kekongruenan Segitiga
6. AD garis bagi sudut	6. Definisi garis bagi sudut
7. $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	7. Definisi kekongruenan segitiga
8. $\angle ADB$ bersuplemen dengan $\angle ADC$	8. Defінsi sudut bersuplemen
9. $2\angle ADB = 180°$ atau $\angle ADB = 90°$ (siku-siku)	9. Substitusi
10. AD garis bagi tinggi	10. Definisi garis tinggi

Mengomunikasi

- Guru meminta salah satu kelompok/siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan menalar baik melalui kegiatan presentasi kelas, kunjung karya (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, dipajang, dan meminta semua kelompok atau siswa memberi komentar pada masing-masing karya), atau karya

kunjung (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, mengutus 2 anggota kelompok mempresentasikan pada kelompok yang lain, dan meminta kelompok yang lain tersebut bertanya atau memberi komentar pada karya yang dipresentasikan).

Kegiatan Penutup

- Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut

Kegiatan 4.1.5: Menentukan Kekongruenan Bangun Datar dengan Bangun Datar Hasil Transformasi (Rotasi, Pergeseran, Dilatasi/Perbesaran, Pencerminan)

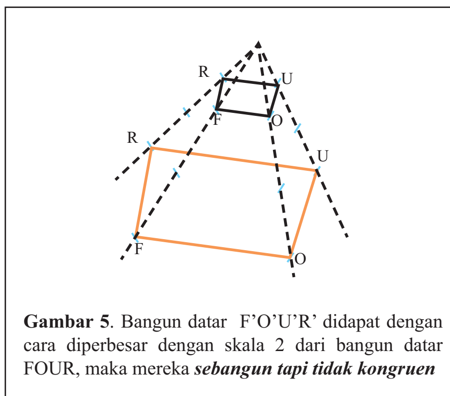
Kegiatan Pendahuluan

- Guru bersama siswa meriviu materi tentang kriteria kekongruenan bangun datar dengan meminta salah satu siswa menyampaikan/menuliskan di papan tulis terkait kesimpulan pada kegiatan 4.1.4
- Guru memotivasi siswa dengan meminta siswa menampilkan beberapa gambar pasangan segitiga yang kongruen dan tidak kongruen.

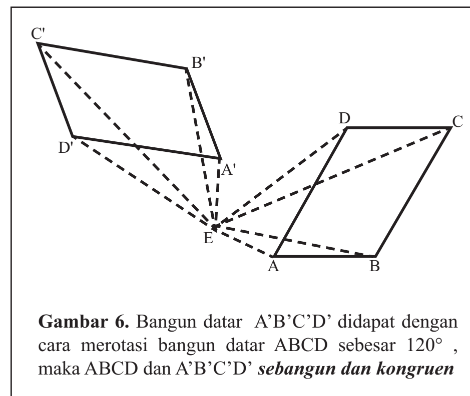
Kegiatan Inti

Mengamati

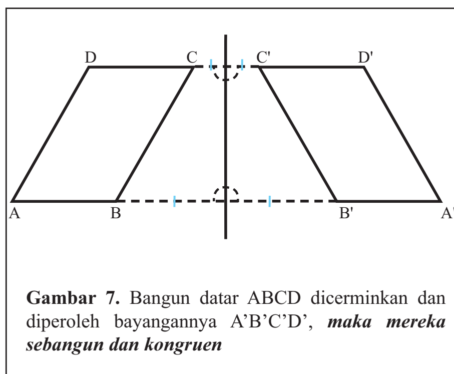
- Guru meminta siswa mengamati informasi yang disajikan di buku siswa tentang kekongruenan segibanyak:



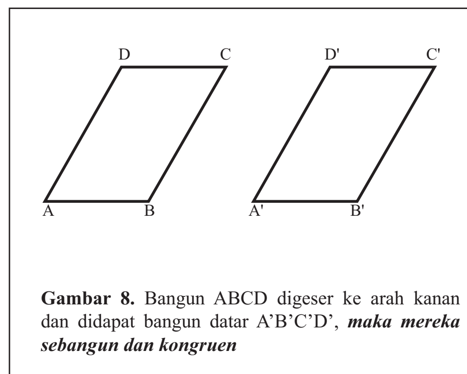
Gambar 5. Bangun datar F'O'U'R' didapat dengan cara diperbesar dengan skala 2 dari bangun datar FOUR, maka mereka ***sebangun tapi tidak kongruen***



Gambar 6. Bangun datar A'B'C'D' didapat dengan cara merotasi bangun datar ABCD sebesar 120° , maka ABCD dan A'B'C'D' ***sebangun dan kongruen***



Gambar 7. Bangun datar ABCD dicerminkan dan diperoleh bayangannya A'B'C'D', ***maka mereka sebangun dan kongruen***



Gambar 8. Bangun ABCD digeser ke arah kanan dan didapat bangun datar A'B'C'D', ***maka mereka sebangun dan kongruen***

- Pada kegiatan mengamati ini, harapannya siswa menemukan dan menuliskan istilah-istilah matematika seperti perbesaran, rotasi, translasi/pergeseran, pencerminan, kongruen.

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait informasi yang disajikan dan atau meminta siswa membuat konjektur terkait pertanyaan yang diajukan oleh temannya atau kelompok lainnya.
- Untuk mendukung kegiatan tersebut, guru membantu siswa teliti dan kritis terhadap informasi yang diamati/dibaca dengan cara mengarahkan fokus perhatian mereka pada istilah matematika (dicetak tebal dan miring) dikaitkan dengan gambar pasangan segitiga seperti bentuknya dan ukuran-ukuran dari unsur bangun datarnya.
- Guru bisa meminta siswa melakukan pengukuran pada unsur-unsur segitiga dan membandingkan ukuran-ukuran tersebut antara dua segitiga tersebut.
- Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan maupun kesimpulan awal yang dia peroleh di kolom yang disediakan
- Guru mencatat/mendata semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian disepakati/dipilih secara bersama-sama untuk dijawab melalui kegiatan berikutnya.

Pertanyaan yang diharapkan meliputi:

1. Apa bayangan bangun datar segibanyak hasil perbesaran dengan skala tertentu sebangun dengan segibanyak awalnya?
2. Apa bayangan bangun datar segibanyak hasil merotasi/memutar dengan sudut putar tertentu sebangun dengan segibanyak awalnya?
3. Apa bayangan bangun datar segibanyak hasil pencerminan sebangun dengan segibanyak awalnya?
4. Apa bayangan bangun datar segibanyak hasil pergeseran sebangun dengan segibanyak awalnya?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

- Guru meminta siswa mengumpulkan informasi melalui kegiatan penyelidikan 4.1.5.1, 4.1.5.2, dan 4.1.5.3
- Selama siswa melakukan kegiatan penyelidikan tersebut, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.
- Guru meminta siswa mengaitkan atau mengasosiasi semua informasi yang dia peroleh pada kegiatan mengamati dan pengumpulan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang siswa buat pada kegiatan menanya

Pembahasan

Masalah 4.1.7

a. $\Delta SUN \cong \Delta RAY$, alasannya karena segitiga RAY adalah segitiga hasil rotasi segitiga SUN dengan pusat putar O sebesar 180° searah jarum jam
b. $\Delta DRO \cong \Delta SPO$, alasannya karena segitiga SPO adalah segitiga hasil pencerminan terhadap titik asal O pada segitiga DRO

Masalah 4.1.8

Jajargenjang ABCD dan jajargenjang baru A'B'C'D' kongruen. Rasio kelilingnya adalah sama dengan rasio sisi-sisi yang bersesuaian. Sedangkan rasio luasnya adalah kuadrat rasio sisi-sisi yang bersesuaian.

- Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan menanya pada kolom yang disediakan

Mengomunikasikan

- Guru meminta salah satu kelompok/siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan menalar baik melalui kegiatan presentasi kelas, kunjung karya (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, dipajang, dan meminta semua kelompok atau siswa memberi komentar pada masing-masing karya), atau karya kunjung (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, mengutus 2 anggota kelompok mempresentasikan pada kelompok yang lain, dan meminta kelompok yang lain tersebut bertanya atau memberi komentar pada karya yang dipresentasikan).

Petunjuk

Kesimpulan yang diharapkan meliputi:

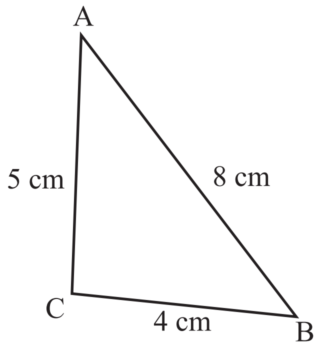
1. Segibanyak hasil dilatasi sebangun dengan segibanyak awalnya, namun tidak kongruen karena sisi-sisi yang bersesuaian tidak kongruen
2. Segibanyak hasil rotasi sebangun dan konruen dengan segibanyak awalnya, karena segibanyak hasil rotasi tidak merubah ukuran sudut-sudutnya dan sisi-sisinya, dengan demikian semua sudut dan sisi-sisi yang bersesuaian kongruen
3. Segibanyak hasil pencerminan sebangun dan konruen dengan segibanyak awalnya, karena segibanyak hasil rotasi tidak merubah ukuran sudut-sudutnya dan sisi-sisinya, dengan demikian semua sudut dan sisi-sisi yang bersesuaian kongruen
4. Segibanyak hasil translasi/pergeseran sebangun dan konruen dengan segibanyak awalnya, karena segibanyak hasil rotasi tidak merubah ukuran sudut-sudutnya dan sisi-sisinya, dengan demikian semua sudut dan sisi-sisi yang bersesuaian kongruen.
5. Kekongruenan adalah kejadian khusus dari kesebangunan, yakni perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian nilainya sama dengan 1
6. Jika dua segibanyak kongruen, maka dua segi banyak tersebut sebangun, namun tidak sebaliknya.

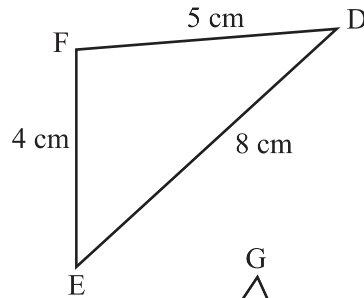
Kegiatan Penutup

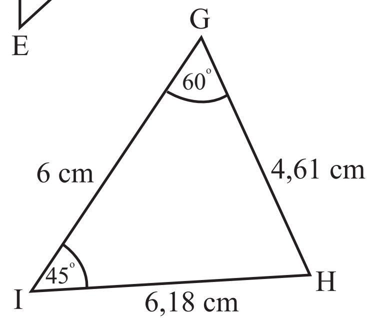
- Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut

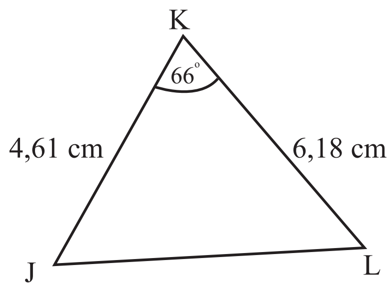
Pembahasan soal latihan 4.1

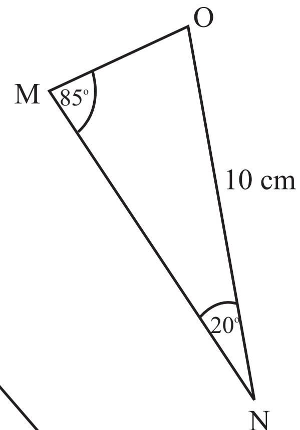
1. Identifikasi segitiga-segitiga berikut yang kongruen menggunakan aturan sinus dan kosinus.

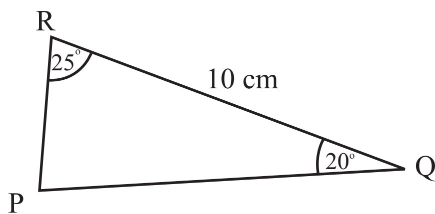


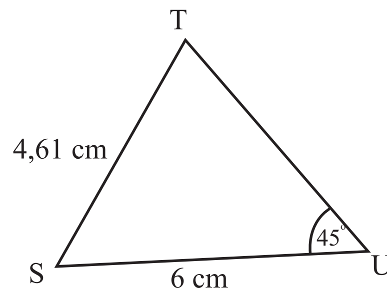












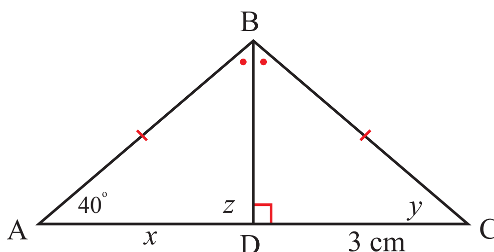
Pembahasan:

Segitiga *ABC* kongruen dengan segitiga *DEF* (konjektur sisi- sisi- sisi).

Perhatikan segitiga *MON*. Besar sudut *MON* = $180^\circ - (85^\circ + 20^\circ) = 75^\circ$. Diperoleh segitiga *PRQ* kongruen dengan segitiga *MON* karena sudut *PRQ* = sudut *MON*, *RQ* = *ON*, sudut *RQP* = sudut *ONM* (konjektur sudut-sisi-sudut).

Perhatikan segitiga *GHI*, besar sudut *GHI* = $180^\circ - (45^\circ + 69^\circ) = 66^\circ$. Diperoleh segitiga *GHI* kongruen dengan segitiga *JKL* karena *GH* = *JK*, sudut *GHI* = sudut *JKL*, *HI* = *KL* (konjektur sisi-sudut-sisi).

2. Diketahui segitiga ΔABD kongruen dengan ΔCBD seperti yang terlihat pada gambar berikut.



Tentukan nilai x,y dan z.

Pembahasan:

Karena segitiga ΔABD kongruen dengan ΔCBD, berarti sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar. Sehingga $AD = CD$, $\angle BAD = \angle BCD$, dan $\angle BDA = \angle BDC$.

Dengan demikian, $x = 3$ cm, $y = 40°$, $z = 90°$.

3. Diketahui segitiga *ABC* dengan *A*(–2, 6), *B*(4, –2), dan *C*(10,6 ; 9,2).
   a. Tentukan bayangan segitiga *ABC* jika dirotasi dengan pusat *O*(0,0) sebesar 60° berlawanan arah jarum jam
   b. Gambarkan segitiga *ABC* dan bayangannya dalam 1 bidang koordinat Cartesius.
   c. Jelaskan apakah segitiga *ABC* dan bayangannya merupakan dua segitiga yang sebangun.
   d. Tentukan perbandingan luas segitiga *ABC* dengan luas segitiga bayangannya.

Pembahasan:

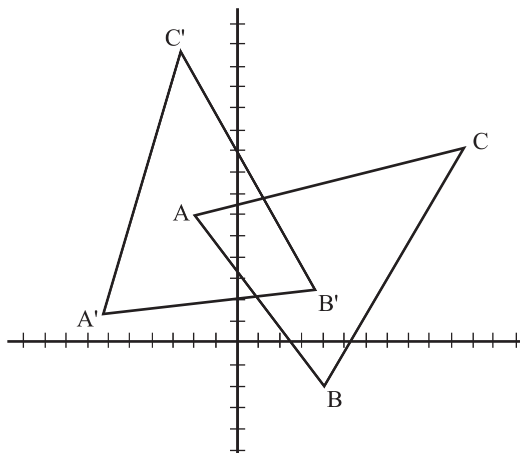
a. Misalkan titik-titik A’, B’ , dan C’ secara berturut-turut adalah bayangan titik-titik A, B, C karena rotasi dengan pusat O(0,0) sebesar 60° berlawanan arah jarum jam. Diperoleh koordinat titik-titik A’, B’ , dan C’ adalah

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 10,6 \\ 6 & -2 & 9,2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 10,6 \\ 6 & -2 & 9,2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-3\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} & 5,3-4,6\sqrt{3} \\ 3-1\sqrt{3} & -1+2\sqrt{3} & 4,6+5,3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

b. Gambar



c. Karena transformasi rotasi mengawetkan jarak, diperoleh *AB=A’B’, AC=A’C’, BC=B’C’*. Jadi segitiga *ABC* dan segitiga bayangannya merupakan segitiga-segitiga sebangun dan juga segitiga-segitiga kongruen.

d. Karena segitiga *ABC* kongruen dengan segitiga bayangannya maka perbandingan luas daerah kedua segitiga tersebut adalah 1:1.

4. Diketahui segitiga *ABC* dengan *A*(3, 0), *B*(6,2), dan *C*(6, –4).

   a. Tentukan bayangan segitiga *ABC* oleh dilatasi dengan pusat *O*(0,0) dan faktor skala 3.

   b. Gambarkan segitiga *ABC* dan bayangannya dalam 1 bidang koordinat Cartesius.

   c. Jelaskan apakah segitiga *ABC* dan bayangannya merupakan dua segitiga yang sebangun

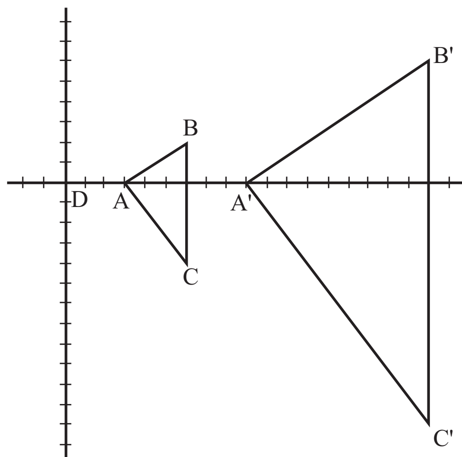
   d. Tentukan perbandingan luas segitiga *ABC* dengan luas segitiga bayangannya.

   Pembahasan:

   a. Misalkan titik-titik *A', B',* dan *C'* secara berturut-turut adalah bayangan titik-titik *A, B, C* karena dilatasi dengan pusat *O*(0,0) dan faktor skala 3. Diperoleh koordinat titik-titik *A', B',* dan *C'* adalah

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix}$$

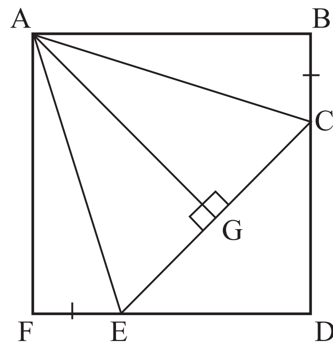
   b. Gambar



   c. Segitiga ABC dan bayangannya merupakan dua segitiga yang sebangun karena $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{3}$.

   d. Perbandingan luas daerah segitiga *ABC* dengan luas daerah segitiga *A' B' C'* adalah 1 : 9.

5. ABDF adalah kubus dan BC = EF. Tentukan pasangan segitiga-segitiga yang kongruen pada gambar di samping.



Pembahasan:

Segitiga *ABC* kongruen dengan segitiga *AFE* karena *AB* = *AF, BC* = *FE,* dan sudut *ABC* = sudut *AFE* = 90°.

Segitiga *AGC* kongruen dengan segitiga *AGE* karena *AC* = *AE, GC* = *GE,* dan *AG* = *AG*

Subbab 4.2 Kesebangunan

Kegiatan Pendahuluan

- Guru memotivasi siswa dengan meminta siswa membaca "sebuah kisah matematikawan Yunani, Thales" di buku siswa dan meminta siswa menjawab pertanyaan dibagian akhir cerita tersebut.

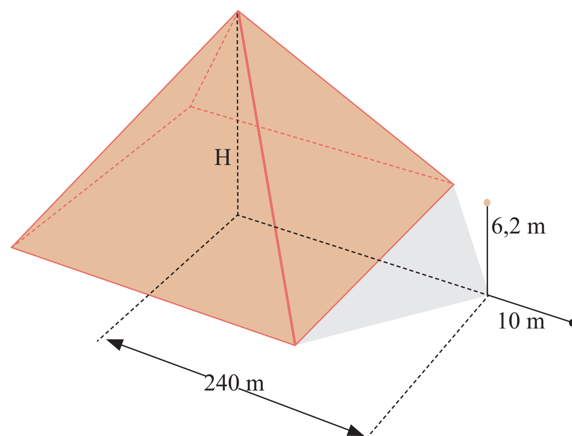
Sebuah Kisah Matematikawan Yunani, Thales.

Saat berlibur di Mesir, matematikawan Yunani, Thales menghitung ketinggian Piramida Besar. Menurut cerita legenda, Thales menempatkan sebuah tiang di ujung bayangan piramida dan menggunakan segitiga yang sebangun untuk menghitung ketinggian. Pengukuran ini melibatkan beberapa nilai pendekatan karena ia tidak dapat mengukur jarak dari titik yang tepat di bawah puncak piramida ke ujung bayangan. Gambar di samping, menjelaskan metodenya.

Ketika membaca cerita tersebut, mungkin ada beberapa pertanyaan yang muncul dalam pikiran kalian, diantaranya:

Bagaimana cara Thales menentukan tinggi piramid tersebut?

Mengapa cara tersebut bisa digunakan?



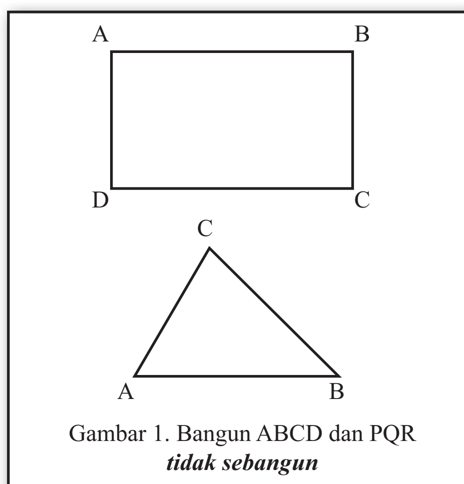
Gambar 1. Sketsa yang dibuat Thales

• Guru bersama siswa meriviu materi prasyarat kesebangunan dengan meminta siswa membaca dan menjawab pertanyaan pada kegiatan apersepsi

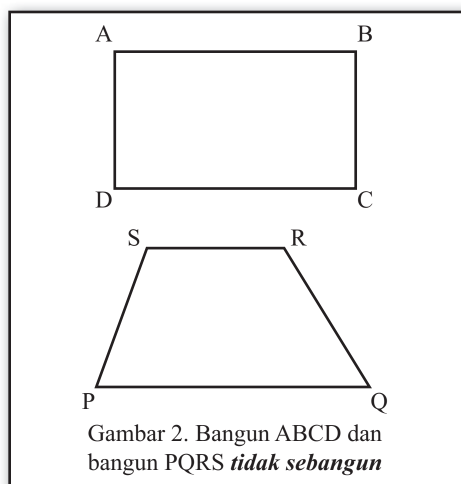
Kegiatan Inti

Mengamati

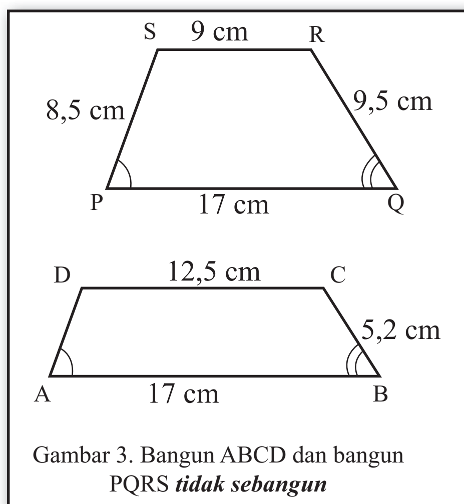
• Guru meminta siswa mengamati informasi yang disajikan di buku siswa halaman tentang kesebangunan dua bangun datar segibanyak.



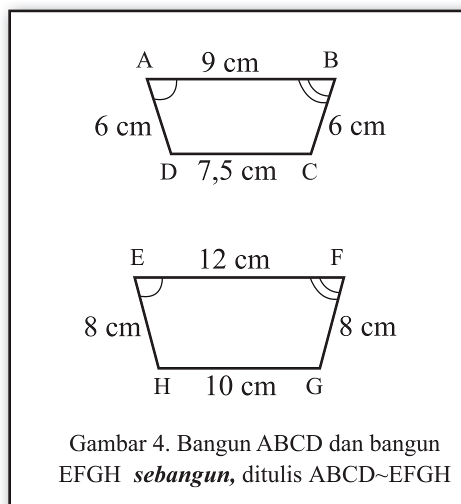
Gambar 1. Bangun ABCD dan PQR ***tidak sebangun***



Gambar 2. Bangun ABCD dan bangun PQRS ***tidak sebangun***



Gambar 3. Bangun ABCD dan bangun PQRS ***tidak sebangun***



Gambar 4. Bangun ABCD dan bangun EFGH ***sebangun,*** ditulis ABCD~EFGH

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait informasi yang disajikan dan atau meminta siswa membuat konjektur terkait hasil amatannya.
- Untuk mendukung kegiatan tersebut, guru membantu siswa teliti dan kritis terhadap informasi yang diamati/dibaca dengan cara mengarahkan fokus perhatian mereka pada istilah matematika (dicetak tebal dan miring) dikaitkan dengan gambar pasangan bangun datar seperti bentuknya dan ukuran-ukuran dari unsur segibanyaknya.
- Guru bisa meminta siswa melakukan pengukuran pada unsur-unsur bangun datarnya dan membandingkan ukuran-ukuran tersebut antar dua abngun datar tersebut.
- Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan maupun kesimpulan awal yang dia peroleh di kolom yang disediakan
- Guru mencatat/mendata semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian disepakati/dipilih secara bersama-sama untuk dijawab melalui kegiatan berikutnya.

Petunjuk

Pertanyaan yang diharapkan muncul, meliputi:

1. Apa syarat dua bangun datar dikatakan sebangun?
2. Bagaimana cara menentukan dua bangun datar sebangun atau tidak?
3. Bagaimana hubungan kesebangunan dengan ukuran-ukuran sudut dan sisi-sisinya?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

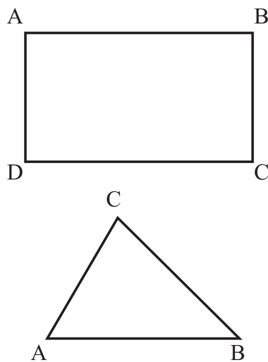
Kegiatan 4.2.1: Mengidentifikasi Kesebangunan Dua Bangun Datar

- Guru meminta siswa mengumpulkan informasi dengan melakukan kegiatan belajar 1.2.1
- Selama siswa melakukan kegiatan 4.2.1, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.

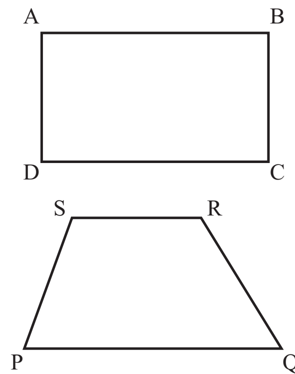
Ayo, Mengumpulkan Informasi

Kegiatan 4.2.1 Mengidentifikasi kesebangunan dua bangun datar

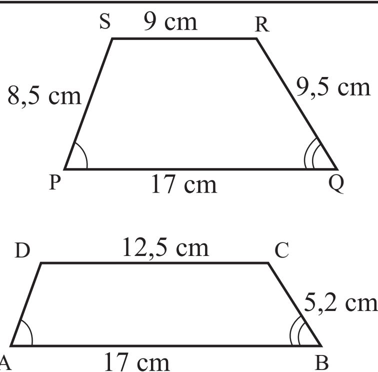
Perhatikan sepasang dua bangun datar yang dilengkapi informasi ukuran panjang sisi-sisi dan sudut-sudutnya.



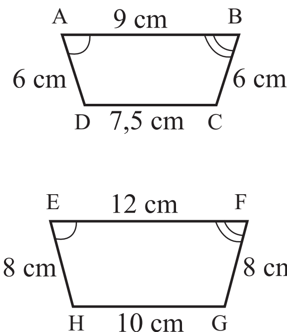
Gambar 1. Bangun ABCD dan PQR ***tidak sebangun***



Gambar 2. Bangun ABCD dan bangun PQRS ***tidak sebangun***



Gambar 3. Bangun ABCD dan bangun PQRS ***tidak sebangun***



Gambar 4. Bangun ABCD dan bangun EFGH ***sebangun,*** ditulis ABCD~EFGH

Gunakan jawaban dari pertanyaan-pertanyaan berikut untuk mengklarifikasi informasi tentang kesebangunan dua bangun dari tiap-tiap gambar:

1. Apakah ada korespondensi antara dua bangun tersebut?
   Jawaban:

2. Jika ada korespondensi, tentukan sisi-sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian?
   Jawaban:

3. Tentukan semua rasio dari pasangan sisi yang bersesuaian? Apakah semua nilai rasionya sama?
   Jawaban:

4. Apakah semua ukuran sudut-sudut yang bersesuaian sama?
   Jawaban:

Petunjuk

Pada Gambar 1

1. Apakah ada korespondensi antara titik-titik sudut pada dua bangun datar tersebut?
   Jawaban:
   Tidak ada
2. Jika ada korespondensi, tentukan sisi-sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian?
   Jawaban:
   -
3. Tentukan semua rasio dari pasangan sisi yang bersesuaian? Apakah semua nilai rasionya sama?
   Jawaban:
   -
4. Apakah semua ukuran sudut-sudut yang bersesuaian sama?
   Jawaban:
   -

Pada Gambar 2

1. Apakah ada korespondensi antara titik-titik sudut pada dua bangun tersebut?
   Jawaban:
   Ada
2. Jika ada korespondensi, tentukan sisi-sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian?
   Jawaban:
   $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}; \overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}; \overline{\overline{CD}} \leftrightarrow \overline{RS}; \overline{DA} \leftrightarrow \overline{SP}$ dan $\angle A \leftrightarrow \angle P; \angle B$
   $\leftrightarrow \angle Q; \angle C \leftrightarrow \angle R; \angle D \leftrightarrow S$
3. Tentukan semua rasio dari pasangan sisi yang bersesuaian? Apakah semua nilai rasionya sama?
   Jawaban:
   $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{12}{7}; \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{6}{8}; \frac{\overline{\overline{CD}}}{\overline{RS}} = \frac{12}{12}; \frac{\overline{DA}}{\overline{\overline{SP}}} = \frac{6}{7{,}5}$
4. Apakah semua ukuran sudut-sudut yang bersesuaian sama?
   Jawaban:
   Tidak sama

Pada Gambar 3

1. Apakah ada korespondensi antara titik-titik sudut pada dua bangun tersebut?
   Jawaban:
   Ada
2. Jika ada korespondensi, tentukan sisi-sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian?
   Jawaban:
   $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}; \overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}; \overline{\overline{CD}} \leftrightarrow \overline{RS}; \overline{DA} \leftrightarrow \overline{SP}$ dan $\angle A \leftrightarrow \angle P; \angle B$
   $\leftrightarrow \angle Q; \angle C \leftrightarrow \angle R; \angle D \leftrightarrow S$
3. Tentukan semua rasio dari pasangan sisi yang bersesuaian? Apakah semua nilai rasionya sama?
   Jawaban:
   $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{17}{17}; \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{5{,}2}{9{,}5}; \frac{\overline{\overline{CD}}}{\overline{RS}} = \frac{12{,}5}{9}; \frac{\overline{DA}}{\overline{\overline{SP}}} = \frac{6}{7{,}5}$, tidak semua rasionya bernilai sama

4. Apakah semua ukuran sudut-sudut yang bersesuaian sama?
   Jawaban:
   Ukuran semua sudut-sudut yang bersesuaian sama besar, yakni $\angle A \leftrightarrow \angle P; \angle B \leftrightarrow \angle Q; \angle C \leftrightarrow \angle R; \angle D \leftrightarrow S$

Pada Gambar 4

1. Apakah ada korespondensi antara titik-titik sudut pada dua bangun tersebut?
   Jawaban:
   Ada
2. Jika ada korespondensi, tentukan sisi-sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian?
   Jawaban:
   $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{EF}; \overline{BC} \leftrightarrow \overline{FG}; \overline{\overline{CD}} \leftrightarrow \overline{GH}; \overline{DA} \leftrightarrow \overline{HA}$ dan $\angle A \leftrightarrow \angle E; \angle B \leftrightarrow \angle F; \angle C \leftrightarrow \angle G; \angle D \leftrightarrow \angle H$
3. Tentukan semua rasio dari pasangan sisi yang bersesuaian? Apakah semua nilai rasionya sama?
   Jawaban:
4. $\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{EF}}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}; \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{FG}}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \frac{\overline{\overline{CD}}}{\overline{\overline{GH}}} = \frac{7{,}5}{10} = \frac{3}{4}; \frac{\overline{DA}}{\overline{\overline{HE}}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, semua nilai rasionya sama
5 Apakah semua ukuran sudut-sudut yang bersesuaian sama?
   Jawaban:
   Ukuran semua sudut-sudut yang bersesuaian sama besar, yakni $\angle A \leftrightarrow \angle P; \angle B \leftrightarrow \angle Q; \angle C \leftrightarrow \angle R; \angle D \leftrightarrow S$

- Guru meminta siswa mengkaitan semua informasi yang dia peroleh pada kegiatan mengamati dan pengumpulan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang dibuat pada kegiatan menanya
- Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan menanya pada kolom yang disediakan.

Mengomunikasikan

- Guru meminta salah satu kelompok/siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan menalar baik melalui kegiatan presentasi kelas, kunjung karya (siswa menuliskan kesimpulannya di kertas plano/kwarto, dipajang, dan meminta semua kelompok atau siswa memberi komentar pada masing-masing karya), atau karya kunjung (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, mengutus 2 anggota kelompok mempresentasikan pada kelompok yang lain, dan meminta kelompok yang lain tersebut bertanya atau memberi komentar pada karya yang dipresentasikan).
- Kesimpulan yang diharapkan:

> Dua bangun datar segibanyak ***sebangun*** adalah dua segibanyak yang terdapat korespondensi satu-satu antara antara titik-titik sudutnya dan memenuhi kriteria:
> 1. Semua rasio dari ukuran sisi-sisi yang bersesuaian sama besar, dan
> 2. Semua sudut-sudut yang bersesuaian kongruen (ukurannya sama besar).

Kegiatan Penutup

- Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut

Kegiatan Belajar 4.2.2: Mengidentifikasi Segitiga-Segitiga yang Sebangun

Kegiatan Pendahuluan

- Guru bersama siswa meriviu materi tentang kriteria kesebangunan bangun datar dengan meminta salah satu siswa menyampaikan/menuliskan di papan tulis terkait kesimpulan pada kegiatan 4.2.1
- Guru memotivasi siswa dengan meminta siswa menampilkan beberapa gambar pasangan segitiga yang sebangun dan tidak sebangun.

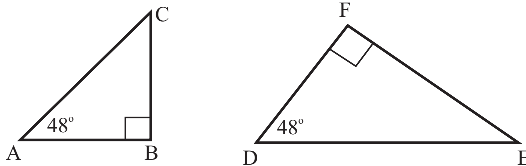
Kegiatan Inti

Mengamati

- Guru meminta siswa mengamati informasi yang disajikan di buku siswa tentang kesebangunan dua segitiga:

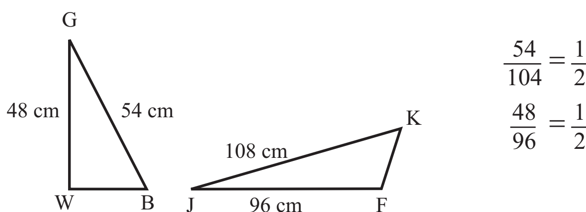
Ayo, Mengamati

Perhatikan gambar berikut!



Dua segitiga siku-siku ABC dan DEF siku-siku di sudut B dan F, sudut A dan B kongruen, maka segitiga ABC dan segitiga DEF sebangun.

Sekarang perhatikan informasi berikut:



$$\frac{54}{104} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{48}{96} = \frac{1}{2}$$

Rasio dari dua sisi yang bersesuaian $\frac{GB}{JK} = \frac{GW}{JF}$ tetapi segitiga GWB ***tidak sebangun*** dengan segitiga JFK.

Pada kegiatan mengamati ini, harapannya siswa menemukan dan menuliskan istilah-istilah matematika seperti sudut, segitiga, sebangun.

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait informasi yang disajikan dan atau meminta siswa membuat konjektur terkait pertanyaan yang diajukan oleh temannya atau kelompok lainnya.
- Untuk mendukung kegiatan tersebut, guru membantu siswa teliti dan kritis terhadap informasi yang diamati/dibaca dengan cara mengarahkan fokus perhatian mereka pada istilah matematika (dicetak tebal dan miring) dikaitkan dengan gambar pasangan segitiga seperti bentuknya dan ukuran-ukuran dari unsur bangun datarnya.
- Guru bisa meminta siswa melakukan pengukuran pada unsur-unsur segitiga dan membandingkan ukuran-ukuran tersebut antar dua segitiga tersebut.
- Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan maupun kesimpulan awal yang dia peroleh di kolom yang disediakan

- Guru mencatat/mendata semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian disepakati/dipilih secara bersama-sama untuk diajawan melalui kegiatan berikutnya.

Petunjuk

Pertanyaan yang diharapkan muncul, meliputi:
1. Apa syarat dua segitiga dikatakan sebangun?
2. Bagaimana cara menentukan dua segitiga sebangun atau tidak?
3. Apakah ada cara pengecekan singkat atau sederhana untuk menentukan kesebangunan dua segitiga?

Mengumpulkan Informasi

- Guru meminta siswa mengumpulkan informasi melalui:

Kegiatan penyelidikan 4.2.2.1:

Petunjuk

Jika siswa kesulitan menggambar segitiga DEF pada langkah 2, guru bisa memberi bantuan/petunjuk dengan meminta siswa melakukan tahapan berikut:
1. Menggambar garis DE dengan panjang lebih pendek atau sama atau lebih panjang dari ukuran panjang sisi AB pada segitiga peratama di langkah (1).
2. Dari titik D buat garis sehinga terbentuk sudut $\angle D$ yang besarnya sama dengan sudut $\angle A$ pada segitiga ABC
3. Dari titik E buat garis sehingga terbentuk sudut $\angle E$ yang besarnya sama dengan sudut $\angle B$.
4. Perpanjang dua garis yang dibentuk tersebut sehingga berpotongan, titik potong kedua garis perpanjangan tersebut beri nama titik F.

- Guru menyampaikan informasi kepada siswa bahwa kegiatan penyelidikan melalui pengukuran dan penerapan aturan sinus dan kosinus bukan untuk membuktikan secara deduktif konjektur tentang kesebangunan segitiga *Sudut-Sudut-Sudut*. Untuk memberikan gambaran tentang pembuktian deduktif terhadap suatu pernyataan atau konjektur siswa diminta membaca contoh 4.2.1. tentang bukti konjektur kesebangunan segitiga *Sudut-Sudut-Sudut*.

Kegiatan 4.2.2.2:
Petunjuk

Jika siswa kesulitan menggambar segitiga DEF pada langkah 2, guru bisa memberi bantuan/petunjuk dengan meminta siswa melakukan tahapan berikut:

1. Gambar sudut D dengan ukuran sudut sama dengan ukuran sudut A
2. Tempatkan titik E pada salah satu kaki sudut D sehingga panjang ruas garis DE sama dengan 2 kali panjang ruas garis AB
3. Tempatkan titik F pada kaki sudut D lainnya sehingga panjang ruas garis DF sama dengan 2 kali panjang ruas garis AC.
4. Hubungkan titik E dan F, sehingga membentuk segitiga DEF.

Kegiatan 4.2.2.3:
Petunjuk

1. Bagaimana perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut yang bersesuaian?
   Jawaban:
   $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{2}{4}; \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{4}{8}$; dan $\angle A = 30° = \angle D$
2. Tentukan ukuran dua sudut-sudut yang lain dan satu sisi yang belum diketahui pada segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan aturan sinus.
   Jawaban:
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\cos 30 = 16 + 4 - 16.\cos 30$ $= 6{,}1436$. Jadi $a = 2.479$
   $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ sehingga $\sin B = \frac{b.\sin a}{a} = \frac{\overline{AC}.\sin 30}{BC} = \frac{\frac{4.1}{2}}{2.479}$ $= 0.807$. Jadi $\angle B = 53{,}8039$
3. Bandingkan sudut-sudut yang bersesuaian dan perbandingan sepasang sisi yang lainnya dari kedua segitiga tersebut. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.
   Jawaban:

Diketahui: $\angle A \cong \angle D$ dan $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$

Akan dibuktikan: ΔABC~ ΔDEF

Bukti Formal: (lengkapi bagian alasan yang mendukung pernyataan-pernyataanya)

Pernyataan	Alasan
1. Misal P adalah titik pada $\overleftrightarrow{AB}$, sehingga $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ (sisi)	1. Garis bisa diperpanjang sesuai dengan keinginan
2. Misal Q adalah titik pada $\overleftrightarrow{AC}$, sehingga $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$ (sisi)	2. Garis bisa diperpanjang sesuai dengan keinginan
3. $\angle A \cong \angle D$ (Sudut)	3. Diketahui
4. $\Delta APQ \cong \Delta DEF$	4. Konjektur Kekongruenan (Sisi-Sudut-Sisi)
5. $\angle E \cong \angle 1$	5. Definisi kekongruenan segibanyak
6. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$	6. Diketahui
7. $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AC}{AQ}$	7. Substitusi
8. $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$	8. Jika 2 garis dipotong transversal sehingga sudut-sudut yang bersesuaian kongruen, maka 2 garis itu sejajar
9. $\angle B \cong \angle 1$	9. Sudut bertolakbelakang
10. $\angle B \cong \angle E$	10. Sifat transitif
11. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	11. Konjektur Sudut-Sudut

- Guru meminta siswa membaca dan memahami contoh 4.2.1 tentang bukti konjektur kesebangunan segitiga Sisi-Sudut-Sisi dan meminta melengkapi tabel pembuktian dengan mengacu pada informasi di alur/flowchart pembuktian.

Kegiatan 4.2.2.4:

Petunjuk

Jika siswa kesulitan menggambar segitiga DEF pada langkah 2, guru bisa memberi bantuan/petunjuk dengan meminta siswa melakukan tahapan berikut:

1. Menggambar garis DE dengan panjang 2 kali panjang sisi AB pada segitiga pertama di langkah (1).
2. Buat lingkaran dengan pusat di D dan panjang jari-jari 2 kali panjang sisi AC

3. Buat lingkaran dengan pusat di E dan panjang jari-jari 2 kali panjang sisi BC
4. Dari salah satu titik perpotongan dua lingkaran tersebut beri nama titik F, buat garis DF dan garis EF, sehingga terbentuklah segitiga DEF .

Kegiatan 4.2.2.5

Kesimpulan yang diharapkan adalah Jika tiga sisi dari segitiga yang pertama proporsional dengan tiga segitiga yang kedua, maka kedua segitiga tersebut sebangun.Selanjutnya ini disebut sebagai konjektur kesebangunan Sisi-Sisi-Sisi.

Contoh 4.2.3

Diketahui: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

Akan dibuktikan: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Pernyataan	Alasan
1. Misal P pada AB, sehingga $AP \cong DE$	1. Garis bisa diperpanjang sesuai yang diinginkan
2. Misal Q pada AC, sehingga $AQ \cong DF$	2. Garis bisa diperpanjang sesuai dengan keinginan
3. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	3. Diketahui
4. $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$	4. Substitusi
5. $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$	5. Jika 2 garis dipotong transversal shngg sudut-sudut yang bersesuaian kongruen, maka 2 garis itu sejajar
6. $\angle B \cong \angle 1$ dan $\angle C \cong \angle 2$	6. Sudut Sehadap
7. $\Delta ABC \cong \Delta APQ$	7. Konjektur Kesebangunan Sudut-Sudut
8. $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PQ}$	8. Definisi Kesebangunan Segibanyak
9. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$	9. Diketahui
10. $\overline{PQ} \cong \overline{EF}$	10. Substitusi
11. $\Delta APQ \cong \Delta DEF$	11. Konjektur Kekongruenan segitiga
12. $\angle B \cong \angle E$ dan $\angle C \cong \angle F$	12. Definisi Kekongruenan dan substitusi
13. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	13. Konjektur Kesebangunan segitiga Sudut-Sudut

- Selama siswa melakukan kegiatan penyelidikan tersebut, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.
- Guru meminta siswa mengaitkan semua informasi yang dia peroleh pada kegiatan mengamati dan pengumpulan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang siswa buat pada kegiatan menanya
- Guru meminta siswa untuk menyelesaikan masalah 4.2.1 dan 4.2.2 untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah terkait kesebangunan segitiga. Guru memberikan bantuan/scaffolding untuk membantu siswa menyelesaikan masalah tersebut dengan mengingatkan tentang tahapan pemecahan masalah Polya dan mengulas kembali konjektur-konjektur kesebangunan segitiga ***Sisi-sisi-sisi, sisi-sudut-sisi,*** dan ***sudut-sisi-sudut*** dan definisi atau apa yang bisa disimpulkan tentang dua segitiga sebangun.

Pembahasan

Masalah 4.2.1

a. Karena segitiga ABC dan PQR sebangun, maka rasio dari ukuran panjang sisi-sisi yang berseusuaian sama. Sehingga diperoleh kesamaan

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR} \text{ atau } QR=\frac{BC.PQ}{AB}=\frac{8.18}{12}=12$$

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PR} \text{ atau } PR=\frac{AC.PQ}{AB}=\frac{15.18}{12}=22{,}5$$

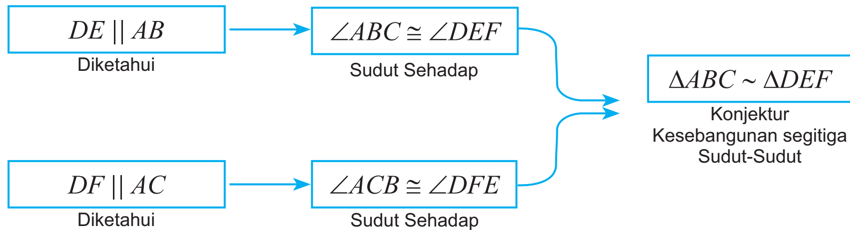
b. Gunakan aturan kosinus untuk menntukan ukuran sudut segitiga ABC, yakni $\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2.AB.AC}$. Ukuran sudut segitiga PQR sama dengan ukuran sudut-sudut ABC karena diketahui mereke sebangun.

Masalah 4.2.2

Petunjuk

Sudut D dan sudut B kongruen, sudut C dan sudut E kongruen karena mereka pasangan sudut-sudut yang sehadap, dan menurut konjektur kesebangunan Sudut-Sudut-sudut, segitga ABC dan ADE sebangun. Gunakan konsep kesebangunan dua segitiga untuk menentukan panjang BC.

Masalah 4.2.3



Pernyataan	Alasan
1. $DE \parallel AB$	1. Diketahui
2. $\angle ABC \cong \angle DEF$	2. Sudut Sehadap
3. $DF \parallel AC$	3. Diketahui
4. $\angle ACB \cong \angle DFE$	4. Sudut sehadap
5. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	5. Kojektur kesebangunan segitiga (Sudut-Sudut)

- Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan menanya pada kolom yang disediakan

Mengomunikasikan

- Guru meminta salah satu kelompok/siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan menalar baik melalui kegiatan presentasi kelas, kunjung karya (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, dipajang, dan meminta semua kelompok atau siswa memberi komentar pada masing-masing karya), atau karya kunjung (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, mengutus 2 anggota kelompok mempresentasikan pada kelompok yang lain, dan meminta kelompok yang lain tersebut bertanya atau memberi komentar pada karya yang dipresentasikan).

Petunjuk

Kesimpulan yang diharapkan adalah

1. Segitiga merupakan segibanyak. Untuk menentukan kesebangunan dua segitiga bisa menggunakan definisi kesebangunan segibanyak.
2. Ada tiga jalan pintas atau konjektur kesebangunan dua segitiga yang bisa digunakan untuk menentukan kesebangunan dua segitiga.

Dengan konjektur ini, tidak harus semua ukuran sisi dan sudut diketahui.

3. Jika dua sudut dari segitiga pertama sama besar dengan dua sudut dari segitiga kedua, maka dua segitiga tersebut sebangun. Selanjutnya ini disebut ***konjektur* kesebangunan Sudut-sudut.**
4. Jika dua sisi dari segitiga pertama proporsional dengan dua sisi segitiga kedua dan sudut yang dibentuk oleh dua sisi yang proporsional sama besar, maka dua segitiga tersebut sebangun. Selanjutnya ini disebut sebagai ***konjektur* kesebangunan Sisi-Sudut-Sisi**.
5. Jika tiga sisi dari segitiga yang pertama proporsional dengan tiga segitiga yang kedua, maka kedua segitiga tersebut sebangun. Selanjutnya ini disebut sebagai ***konjektur* kesebangunan Sisi-Sisi-Sisi**.

Kegiatan Penutup

- Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut

Kegiatan 4.2.3: Menentukan Kesebangunan Bangun Datar dengan Bangun Datar Hasil Transformasi (Rotasi, Pergeseran, Dilatasi/Perbesaran, Pencerminan)

Kegiatan Pendahuluan

- Guru bersama siswa meriviu materi tentang kriteria kesebangunan bangun datar dengan meminta salah satu siswa menyampaikan/menuliskan di papan tulis terkait kesimpulan pada kegiatan 4.2.2
- Guru memotivasi siswa dengan meminta siswa menampilkan beberapa gambar pasangan segitiga yang sebangun dan tidak sebangun.

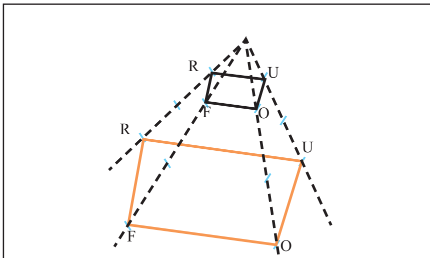
Kegiatan Inti

Mengamati

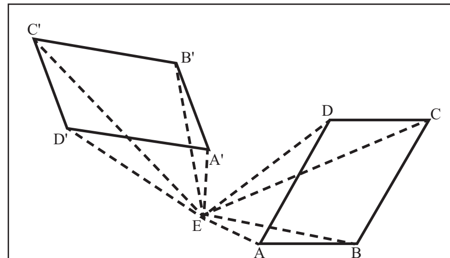
- Guru meminta siswa mengamati informasi yang disajikan di buku siswa tentang kesebangunan dua segitiga:

Ayo, Mengamati

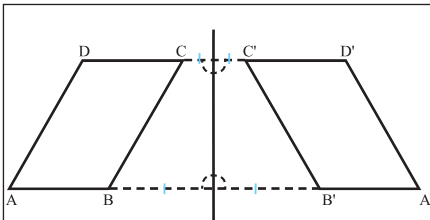
Perhatikan informasi berikut!



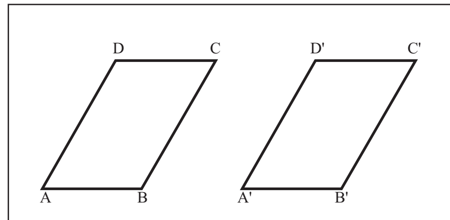
Gambar 5. Bangun datar F'O'U'R' didapat dengan cara diperbesar dengan skala 2 dari bangun datar FOUR, maka mereka ***sebangun tapi tidak kongruen***



Gambar 6. Bangun datar A'B'C'D' didapat dengan cara merotasi bangun datar ABCD sebesar 120° , maka ABCD dan A'B'C'D' ***sebangun dan kongruen***



Gambar 7. Bangun datar ABCD dicerminkan dan diperoleh bayangannya A'B'C'D', ***maka mereka sebangun dan kongruen***



Gambar 8. Bangun ABCD digeser ke arah kanan dan didapat bangun datar A'B'C'D', ***maka mereka sebangun dan kongruen***

Pada kegiatan mengamati ini, harapannya siswa menemukan dan menuliskan istilah-istilah matematika seperti transformasi dilatasi, rotasi, pencerminan, translasi, segibanyak, dan sebangun.

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait informasi yang disajikan dan atau meminta siswa membuat konjektur terkait pertanyaan yang diajukan oleh temannya atau kelompok lainnya.
- Untuk mendukung kegiatan tersebut, guru membantu siswa teliti dan kritis terhadap informasi yang diamati/dibaca dengan cara mengarahkan fokus perhatian mereka pada istilah matematika (dicetak tebal dan miring) dikaitkan dengan gambar pasangan segitiga seperti bentuknya dan ukuran-ukuran dari unsur bangun datarnya.

- Guru bisa meminta siswa melakukan pengukuran pada unsur-unsur segitiga dan membandingkan ukuran-ukuran tersebut antar dua segitiga tersebut.
- Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan maupun kesimpulan awal yang dia peroleh di kolom yang disediakan
- Guru mencatat/mendata semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian disepakati/dipilih secara bersama-sama untuk diajawan melalui kegiatan berikutnya.

Pertanyaan yang diharapkan meliputi:

1. Apakah bayangan bangun datar segibanyak hasil dilatasi dengan skala tertentu sebangun dengan segibanyak awalnya?
2. Apakah bayangan bangun datar segibanyak hasil merotasi/memutar dengan sudut putar tertentu sebangun dengan segibanyak awalnya?
3. Apakah bayangan bangun datar segibanyak hasil pencerminan sebangun dengan segibanyak awalnya?
4. Apakah bayangan bangun datar segibanyak hasil pergeseran sebangun dengan segibanyak awalnya?

Mengumpulkan Informasi dan Menalar

- Guru meminta siswa mengumpulkan informasi melalui kegiatan penyelidikan 4.2.3.1, 4.2.3.2, 4.2.3.3 dan 4.2.3.4
- Selama siswa melakukan kegiatan penyelidikan tersebut, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.

Pembahasan

Masalah 4.2.4

1. Dilatasi dengan skala 2
   Diketahui: luas suatu persegi ABCD adalah 9 cm^2, berarti panjang sisi-sisinya adalah $s = 3$ cm.
   Karena dikenai transformasi dilatasi dengan skala 2, maka panjang sisinya menjadi $s' = 2 \times 3 = 6$ cm. Dengan demikian luas $A'B'C'D' = 6 \times 6 = 36$ cm^2.
2. Rotasi dengan pusat putar dititik A sebesar 30 derajat searah jarum jam
   Diketahui: luas suatu persegi ABCD adalah 9 cm^2, berarti panjang sisi-sisinya adalah $s = 3$ cm. Karena dikenai transformasi rotasi, panjang sisi-sisinya tetap, sehingga luas segitiga hasil transformasi rotasi juga tetap yakni 9 cm^2.

- Guru meminta siswa mengkait-kaitkan semua informasi yang dia peroleh pada kegiatan mengamati dan penyelidikan untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang dibuat pada kegiatan menanya
- Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan menanya pada kolom yang disediakan.

Mengomunikasikan

- Guru meminta salah satu kelompok/siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan menalar baik melalui kegiatan presentasi kelas, kunjung karya (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, dipajang, dan meminta semua kelompok atau siswa memberi komentar pada masing-masing karya), atau karya kunjung (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, mengutus 2 anggota kelompok mempresentasikan pada kelompok yang lain, dan meminta kelompok yang lain tersebut bertanya atau memberi komentar pada karya yang dipresentasikan).

Petunjuk

Kesimpulan yang diharapkan adalah

1. Segitiga merupakan segibanyak. Untuk menentukan kesebangunan dua segitiga bisa menggunakan definisi kesebangunan segibanyak.
2. Ada tiga jalan pintas atau konjektur kesebangunan dua segitiga yang bisa digunakan untuk menentukan kesebangunan dua segitiga.
   Dengan konjektur ini, tidak harus semua ukuran sisi dan sudut diketahui.
3. Jika dua sudut dari segitiga pertama sama besar dengan dua sudut dari segitiga kedua, maka dua segitiga tersebut sebangun.
   Selanjutnya ini disebut ***konjektur*** **kesebangunan Sudut-sudut.**
4. Jika dua sisi dari segitiga pertama proporsional dengan dua sisi segitiga kedua dan sudut yang dibentuk oleh dua sisi yang proporsional sama besar, maka dua segitiga tersebut sebangun.
   Selanjutnya ini disebut sebagai ***konjektur*** **kesebangunan Sisi-Sudut-Sisi**.
5. Jika tiga sisi dari segitiga yang pertama proporsional dengan tiga segitiga yang kedua, maka kedua segitiga tersebut sebangun.
   Selanjutnya ini disebut sebagai ***konjektur*** **kesebangunan Sisi-Sisi-Sisi**.

Kegiatan Penutup

- Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut.

Kegiatan 4.2.4: Menentukan Ukuran Unsur-Unsur Segitiga yang Bersesuaian dari Dua Segitiga yang Sebangun

Kegiatan Pendahuluan

- Guru bersama siswa meriviu materi tentang kriteria kesebangunan bangun datar dengan meminta salah satu siswa menyampaikan/menuliskan di papan tulis terkait kesimpulan pada kegiatan 4.2.3
- Guru memotivasi siswa dengan meminta siswa menampilkan beberapa gambar pasangan segitiga yang sebangun dan tidak sebangun.

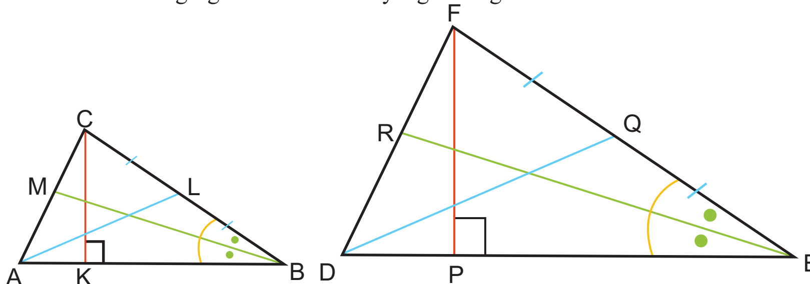
Kegiatan Inti

Mengamati

- Guru meminta siswa mengamati informasi yang disajikan di buku siswa tentang kesebangunan dua segitiga dikaitkan dengan ukuran garis-garis istimewa pada segitiga (garis bagi sudut, garis tinggi, dan garis berat segitiga):

Ayo, Mengamati

Perhatikan dua segitiga ABC dan DEF yang sebangun ***ABC~DEF.***



- Garis CK dan garis FP adalah salah satu ***garis tinggi*** segitiga ABC dan DEF.
- Garis AL dan DQ adalah salah satu ***garis berat*** segitiga ABC dan DEF, dan
- Garis BM dan ER adalah salah satu ***garis sudut*** segitiga ABC dan DEF.

Berdasarkan konsep kesebangunan dua segitiga, maka dapat ditulis beberapa kesimpulan:

- $\angle A \cong \angle D$; $\angle B \cong \angle E$; $\angle F \cong \angle F$
- $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{DF}$

Karena, ***ABC~DEF,*** maka dapat disimpulkan pula bahwa

- Sisi AB dan DE adalah paangan sisi yang bersesuaian dan garis tinggi terdapat sisi AB pada segitiga ABC dan garis FP adalah garis tinggi terhadap sisi DE pada segitiga DEF, maka kita katakan garis CK dan garis FP adalah garis-garis yang bersesuaian/berkorespondensi.
- Garis BM dan garis ER adalah garis-garis yang bersesuaian/berkorespondensi Mengapa?
- Garis AL dan garis DQ adalah garis-garis yang bersesuaian/berkorespondensi Mengapa?

Menanya

- Guru meminta siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait informasi yang disajikan dan atau meminta siswa membuat konjektur terkait pertanyaan yang diajukan oleh temannya atau kelompok lainnya.
- Untuk mendukung kegiatan tersebut, guru membantu siswa teliti dan kritis terhadap informasi yang diamati/dibaca dengan cara mengarahkan fokus perhatian mereka pada istilah matematika (dicetak tebal dan miring) dikaitkan dengan gambar pasangan segitiga seperti bentuknya dan ukuran-ukuran dari unsur bangun datarnya.
- Guru bisa meminta siswa melakukan pengukuran pada unsur-unsur segitiga dan membandingkan ukuran-ukuran tersebut antar dua segitiga tersebut.
- Guru meminta semua siswa menuliskan pertanyaan maupun kesimpulan awal yang dia peroleh di kolom yang disediakan
- Guru mencatat/mendata semua pertanyaan/kesimpulan yang dibuat siswa di papan tulis atau LCD kemudian disepakati/dipilih secara bersama-sama untuk dijawab melalui kegiatan berikutnya.

Pertanyaan yang diharapkan muncul dan akan dibahas meliputi:

1. Apakah garis bagi sudut yang bersesuaian perbandingannya sama pada dua segitiga sebangun?
2. Apakah garis tinggi yang bersesuaian perbandingannya sama pada dua segitiga sebangun?
3. Apakah garis berat yang bersesuaian perbandingannya sama pada dua segitiga sebangun?

Mengumpulkan Informasi

- Guru meminta siswa mengumpulkan informasi melalui kegiatan penyelidikan 4.2.4.1.
- Selama siswa melakukan kegiatan penyelidikan tersebut, guru mendampingi siswa memahami istilah-istilah atau informasi-informasi yang disajikan melalui tanya jawab baik dalam kelompok maupun secara klasikal.

Menalar

- Guru meminta siswa mengkait-kaitkan semua informasi yang dia peroleh pada kegiatan mengamati dan pengumpulan informasi untuk menjawab pertanyaan dan mengklarifikasi kesimpulan yang siswa buat pada kegiatan menanya.
- Pada saat diskusi tentang contoh 4.1.1, guru meminta siswa membaca pernyataan yang akan dibuktikan dan memahami maksud pernyataannya dengan meminta salah satu siswa menyatakan pernyataan tersebut dengan bahasanya sendiri.
- Guru meminta siswa memahami proses analisis sebelum pembuktian formal, karena proses analisis akan membantu siswa berpikir sistematis. Guru bisa meminta siswa membuat alur/flowchart pembuktian sebelum menuliskan secara formal pembuktian.

Pembahasan

Masalah 4.1.4

Petunjuk

Kesimpulan yang diharapkan adalah

1. Segitiga merupakan segibanyak. Untuk menentukan kesebangunan dua segitiga bisa menggunakan definisi kesebangunan segibanyak.
2. Ada tiga jalan pintas atau konjektur kesebangunan dua segitiga yang bisa digunakan untuk menentukan kesebangunan dua segitiga.
   Dengan konjektur ini, tidak harus semua ukuran sisi dan sudut diketahui.
3. Jika dua sudut dari segitiga pertama sama besar dengan dua sudut dari segitiga kedua, maka dua segitiga tersebut sebangun.
   Selanjutnya ini disebut ***konjektur* kesebangunan Sudut-sudut.**
4. Jika dua sisi dari segitiga pertama proporsional dengan dua sisi segitiga kedua dan sudut yang dibentuk oleh dua sisi yang proporsional sama besar, maka dua segitiga tersebut sebangun.
   Selanjutnya ini disebut sebagai ***konjektur* kesebangunan Sisi-Sudut-Sisi**.

5. Jika tiga sisi dari segitiga yang pertama proporsional dengan tiga segitiga yang kedua, maka kedua segitiga tersebut sebangun. Selanjutnya ini disebut sebagai ***konjektur* kesebangunan Sisi-Sisi-Sisi**.

- Guru meminta siswa menuliskan jawaban atas pertanyaan yang disepakati untuk dijawab dan atau menuliskan kesimpulan baru terkait kesimpulan awal yang diajukan pada kegiatan menanya pada kolom yang disediakan

Mengomunikasikan

- Guru meminta salah satu kelompok/siswa mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan menalar baik melalui kegiatan presentasi kelas, kunjung karya (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, dipajang, dan meminta semua kelompok atau siswa memberi komentar pada masing-masing karya), atau karya kunjung (siswa menuliskan kesimpulannya di kerta plano/kwarto, mengutus 2 anggota kelompok mempresentasikan pada kelompok yang lain, dan meminta kelompok yang lain tersebut bertanya atau memberi komentar pada karya yang dipresentasikan).

Petunjuk

Kesimpulan yang diharapkan adalah

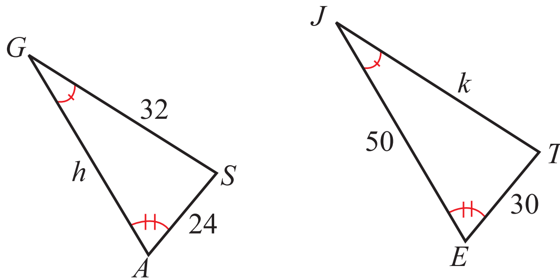
1. Segitiga merupakan segibanyak. Untuk menentukan kesebangunan dua segitiga bisa menggunakan definisi kesebangunan segibanyak.
2. Ada tiga jalan pintas atau konjektur kesebangunan dua segitiga yang bisa digunakan untuk menentukan kesebangunan dua segitiga. Dengan konjektur ini, tidak harus semua ukuran sisi dan sudut diketahui.
3. Jika dua sudut dari segitiga pertama sama besar dengan dua sudut dari segitiga kedua, maka dua segitiga tersebut sebangun. Selanjutnya ini disebut ***konjektur* kesebangunan Sudut-sudut.**
4. Jika dua sisi dari segitiga pertama proporsional dengan dua sisi segitiga kedua dan sudut yang dibentuk oleh dua sisi yang proporsional sama besar, maka dua segitiga tersebut sebangun. Selanjutnya ini disebut sebagai ***konjektur* kesebangunan Sisi-Sudut-Sisi**.
5. Jika tiga sisi dari segitiga yang pertama proporsional dengan tiga segitiga yang kedua, maka kedua segitiga tersebut sebangun. Selanjutnya ini disebut sebagai ***konjektur* kesebangunan Sisi-Sisi-Sisi**.

Kegiatan Penutup

Guru meminta beberapa siswa untuk menyimpulkan hasil kegiatan belajarnya dan guru memberikan klarifikasi atau penguatan terhadap kesimpulan tersebut.

Pembahasan soal latihan 4.2

1. Perhatikan dua segitiga ASG dan ETJ berikut:



   a. Apakah segitiga ΔASG dan ΔETJ sebangun? Berikan alasannya.
   b. Tentukan nilai h dan k.

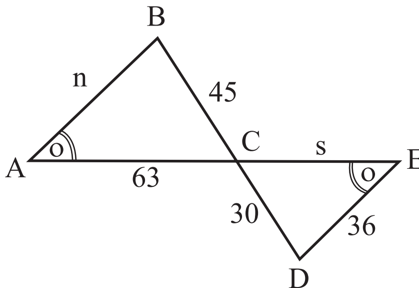
   Pembahasan:

   a. Karena ada dua sudut bersesuaian yang berukuran sama ($\angle A = \angle E$, $\angle G = \angle J$), maka menurut ***shortcut kekongruenan Sudut-sudut*** segitiga ASG dan ETJ kongruen.
   b. Karena segitiga ASG dan ETJ kongruen maka perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama besar:

   $\frac{\overline{AS}}{\overline{ET}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{EJ}}$ sehingga diperoleh $\frac{24}{30} = \frac{h}{50}$ dengan demikian $h = 50 \times \frac{24}{30} = 40$

   $\frac{\overline{AS}}{\overline{ET}} = \frac{\overline{SG}}{\overline{TJ}}$ sehingga diperoleh $\frac{24}{30} = \frac{32}{k}$ dengan demikian $k = 30 \times \frac{32}{24} = 40$

2. Perhatikan gambar berikut:



   Tentukan nilai n dan s.

Pembahasan:

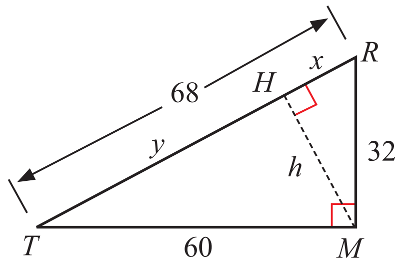
Karena sudut A dan E sama besar dan sudut ACB dan sudut ECD sama besar (sudut bertolakbelakang), maka menurut shortcut kesebangunan segitiga ABC dan EDC sebangun.

Dengan demikian, perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama besar, yakni

$\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$ atau $\frac{63}{s} = \frac{45}{30}$ sehingga diperoleh $s = 63 \times \frac{30}{45} = 42$

$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ED}}$ atau $\frac{45}{30} = \frac{n}{36}$ sehingga diperoleh $s = 36 \times \frac{45}{30} = 54$

3. Mengapa $\Delta TMR \sim \Delta THM \sim \Delta MHR$? Tentukan nilai x, y dan h.



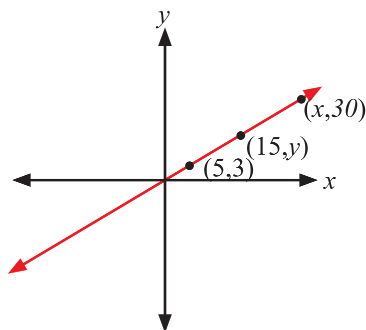
Pembahasan:

$\frac{68}{32} = \frac{32}{x}$ sehingga $x = \frac{32.32}{68} = 15,06$

$\frac{68}{32} = \frac{60}{h}$ sehingga $h = \frac{32.60}{68} = 28,24$

$\frac{y}{60} = \frac{60}{68}$ sehingga $y = \frac{60.60}{68} = 52,94$

4. Tentukan nilai x dan y.

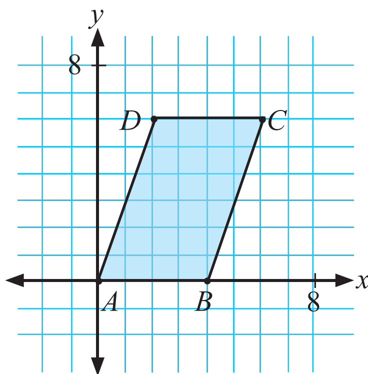


Pembahasan:

$\frac{y}{3} = \frac{15}{5}$ sehingga $y = 9$

$\frac{x}{5} = \frac{30}{3}$ sehingga x =50

5. Gunakan aturan pasangan urutan, $(x,y) \rightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$, untuk merelokasi koordinat titik-titik sudut jajargenjang *ABCD*. Sebut jajargenjang baru *A'B'C'D'*. Apakah *A'B'C'D'* sebangun dengan *ABCD*? Jika sebangun, berapa rasio keliling *ABCD* terhadap keliling *A'B'C'D'*? berapa rasio luasnya?

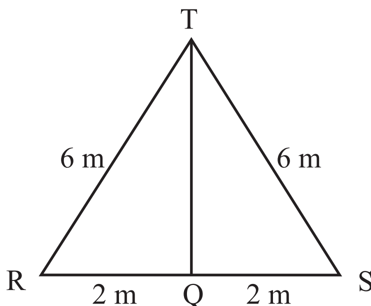


Pembahasan:

- Sebangun, karena dilatasi tidak mengubah bentuk.
- Keliling $ABCD = A'B'C'D' = AB : A'B' = 4 : 2 = 2$
- Luas $ABCD = A'B'C'D' = (AB)^2 : (A'B')^2 = 4^2 : 2^2 = 4$

Pembahasan Uji Kompetensi 1

1. Perhatikan ΔRQT dan ΔSQT pada gambar di bawah. Selidiki apakah ΔRQT kongruen dengan ΔSQT? Apakah akibatnya?

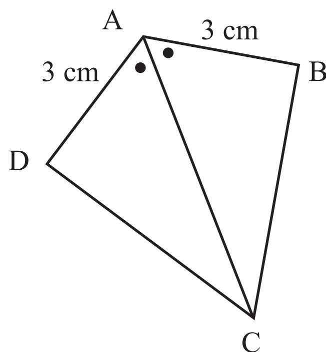


Pembahasan:

Karena $RT = ST$, $RQ = SQ$ dan $TQ = TQ$, maka ketiga sisi yang bersesuaian sama panjang. Berdasarkan konjektur kekongruenan Sudut-Sudut-Sudut, $\Delta RQT \cong \Delta SQT$.

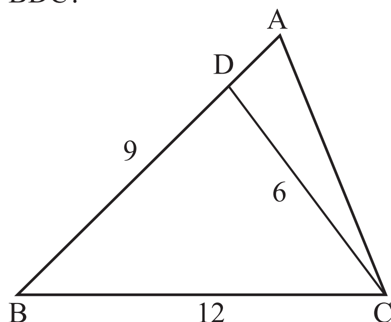
Akibatnya besar $\angle R = \angle S$, $\angle RTQ = \angle STQ$ dan $\angle TQR = \angle TQS$.

2. Perhatikan gambar di samping. Selidiki apakah ΔDAC kongruen dengan ΔBAC. Apakah akibatnya?



Pembahasan:
Perhatikan ΔDAC dan ΔBAC.
Karena $DA = BA$, $\angle DAC = \angle BAC$ dan $AC = AC$, maka berdasarkan konjektur kekongruenan segitiga Sisi-Sudut-Sisi, $\Delta DAC \cong \Delta BAC$.
Akibatnya $CD = BC$, $\angle ADC = \angle ABC$, $\angle DCA = \angle BCA$.

3. Perhatikan segitiga ABC seperti yang ditunjukkan gambar disamping. Diketahui panjang $BC = 12$ *cm*, $DB = 9$ *cm*, $CD = 6$ *cm* dan $\angle BCD = \angle BAC$. Tentukan rasio dari keliling segitiga. Tentukan rasio dari keliling segitiga ADC terhadap segitiga BDC?



Pembahasan:

Pada segitiga ΔBAC dan ΔBCD, diketahui $\angle BCD = \angle BAC$ dan $\angle B = \angle B$, dan berdasarkan konjektur kesebangunan segitiga Sudut-Sudut, maka segitiga ΔBAC dan ΔBCD sebangun. Sehingga rasio dari pasangan sisi yang bersesuaian sama besar.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{BD}$$

Sehingga $AB = \frac{BC^2}{BD} = 16$

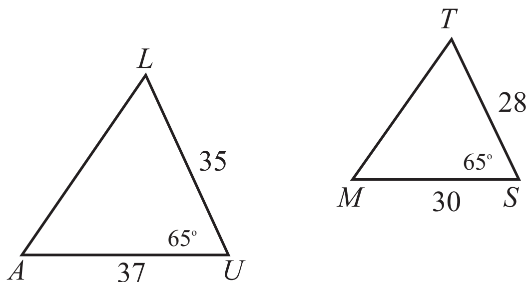
Dan $AD = AB - BD = 16 - 9 = 7$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$AC = \frac{BC \times CD}{BD} = 8$$

Keliling segitiga $\Delta ADC = 7 + 6 + 8 = 21$, dan keliling segitiga ΔBDC = 27, maka rasionya adalah $\frac{7}{9}$.

4. Perhatikan dua segitiga AUL dan MST berikut:

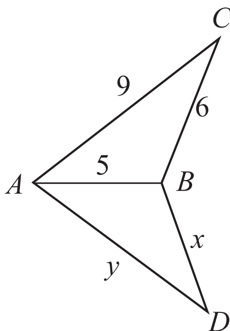


Apakah segitiga AUL dan MST sebangun, $\Delta AUL \sim \Delta MST$? Berikan alasannya.

Pembahasan:

Tidak sebangun, karena $\frac{28}{35} \neq \frac{30}{37}$

5. Jika $\Delta ABC \sim \Delta DBA$, tentukan nilai x dan y, dalam cm.

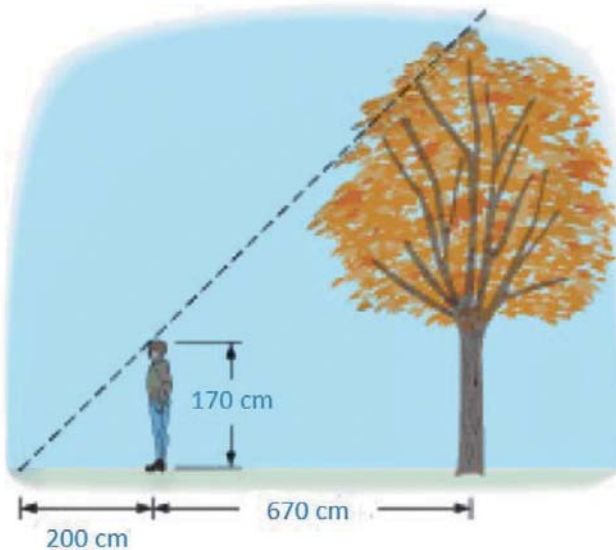


Pembahasan:

$\frac{x}{6} = \frac{5}{5}$ sehingga $x = 6$

$\frac{y}{9} = \frac{5}{5}$ sehingga $y = 9$

6. Latif yang memiliki tinggi badan 170 cm ingin tau tinggi bagian atas pohon. Dia berjalan sepanjang bayangan pohon hingga kepalanya berada pada posisi dimana bayangannya bertumpukan tepat pada bagian ujung bayangan pohonnya. Dan ternyata dia berada sejauh 670 cm dari pohon dan sejauh 200 cm dari ujung bayangannya. Berapa tinggi pohon tersebut?



Pembahasan:

Misal tinggi pohon adalah *y cm*

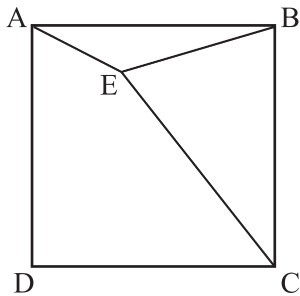
$\frac{y}{170} = \frac{870}{200}$ sehingga $y = \frac{170 \times 870}{200}$ =739,5 cm

7. Rasio dari keliling dari dua jajargenjang yang sebangun adalah 3:7. Berapa rasio luas mereka?

   Pembahasan:

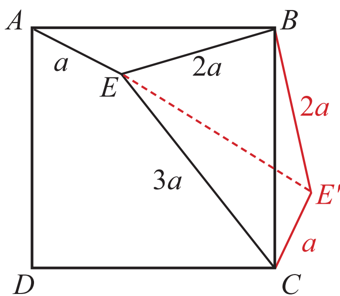
   Karena rasio kelilingnya 3:7, maka rasio ukuran panjang sisi-sisi yang bersesuaian juga 3:7, dengan demikian rasio dari luas nya adalah $3^2:7^2 = 9:49$

8. Diketahu suatu persegi dengan perbandingan panjang, tentukan ukuran sudut, dalam derajat.



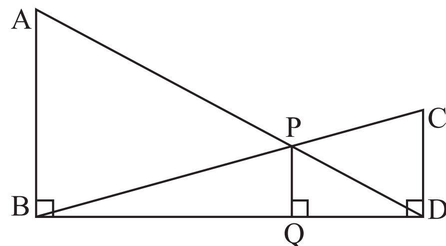
Pembahasan:

Putar dengan pusat putar di B sebesar 90° berlawanan arah jarum jam, seperti pada gambar. Hubungkan EE'.



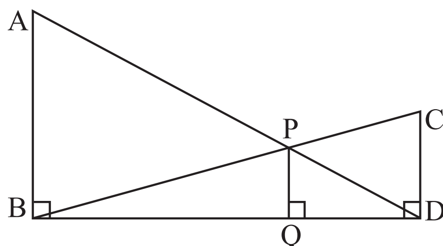
Sehingga $\Delta BEE'$ adalah segitiga siku-siku sama kaki dan oleh karena itu, $\angle BE'E$ = 45 dan panjang EE' adalah $2\sqrt{2}a$. Sehingga $\Delta CEE'$ adalah segitiga siku-siku, dengan menerapkan teorema Pythagoras didapat $\angle CE'E = 90$. Kita punya $\angle AEB$ = $\angle BE'C = \angle CE' \angle BE'E = 90 + 45 = 135$.

9. Pada bangun datar di samping, diketahui $\angle ABD = \angle CDB = \angle PQD$ = 90°. Jika $AB:CD$ = 3:1, rasio dari $CD:PQ$ adalah …



Pembahasan:

Misal $BQ = a$ dan $DQ = b$, seperti yang ditunjukkan bangun datar berikut.

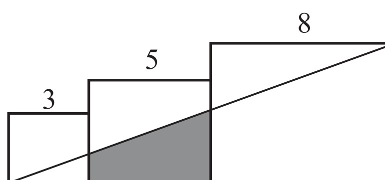


Berdasarkan konjektur kesebangunan segitiga (Sudut-Sudut-Sudut), segitiga *ABD* dan segitiga *PQD* sebangun. Sehingga, $\frac{PQ}{AB} = \frac{b}{(a+b)}$.

Berdasarkan konjektur kesebangunan segitiga (Sudut-Sudut-Sudut), segitiga CBD dan segitiga PBQ sebangun. Sehingga, $\frac{PQ}{CD} = \frac{a}{(a+b)}$.

Dengan membagi persamaan kedua dengan persamaan pertama, kita dapatkan persamaan $\frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} = 3$. Dengan demikian, $\frac{CD}{PQ} = \frac{(a+b)}{a} = \frac{4}{3}$.

10. Tiga persegi dengan panjang sisi 3, 5, dan 8 diletakkan seperti bersinggungan. Titik sudut dari persegi terkecil dihubungkan dengan titik sudut pada persegi terbesar, seperti yang terlihat ada gambar.

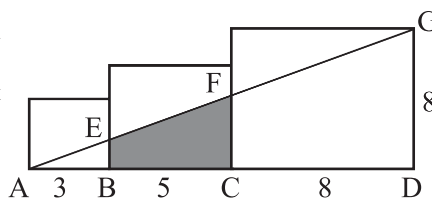


Tentukan luas daerah yang diarsi?

Pembahasan:

Pada segitiga ΔABE dan ΔADG, berdasarkan konjektur kesebangunan segitiga Sudut-Sudut, maka segitiga ΔABE dan ΔADG kongruen.

Sehingga $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DG} \rightarrow \text{BE} = \frac{3}{2}$.



Dan berdasarkan konjektur kesebangunan segitiga Sudut-Sudut, maka segitiga ΔABE dan ΔACF kongruen.

Sehingga $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF} \rightarrow \text{CF} = 4$.

Dengan demikian, luas segiempat *EBFC* $= \text{luas } \Delta ACF - \text{luas } \Delta ABE$

$= \frac{1}{2}.8.4 - \frac{1}{2}.3.\frac{3}{2} = 16 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$.

Glosarium

Aturan penjumlahan	Aturan penghitungan peluang untuk kejadian yang saling lepas.
Aturan perkalian	Aturan penghitungan peluang untuk kejadian yang tidak saling lepas
Aturan Sturgess	Aturan yang menjelaskan cara membagi data berukuran besar ke dalam kelas-kelas tertentu.
Bangun datar kongruen	Dua bangun datar kongruen jika keduanya identik/ sama dalam bentuk dan ukuran.
Data	Ukuran dari suatu nilai.
Datum	Satu ukuran dari suatu nilai.
Data berkelompok	Data yang sudah dikelompokkan dalam kelas-kelas.
Data tunggal	Data mentah yang belum diolah atau dikelompokkan.
Desil	Nilai yang membagi data menjadi 10 kelompok sama banyak.
Deviasi standar	Akar dari jumlah kuadrat deviasi dibagi banyaknya data.
Diagram batang	Diagram berbentuk batang-batang tegak atau mendatar dan sama lebar dengan batang-batang terpisah untuk menggambarkan nilai suatu objek penelitian.
Diagram batang daun	Diagram yang terdiri dari batang dan daun. batang memuat angka puluhan dan daun memuat angka satuan.
Diagram garis	Diagram berbentuk garis yang digunakan untuk menyajikan data statistik yang diperoleh berdasarkan pengamatan dari waktu ke waktu secara berurutan.

Dilatasi/perskalaan/perbesaran Suatu dilatasi dari bangun datar dari titik O dengan faktor skala $c(c \neq 0)$ adalah suatu transformasi dari bangun datar dimana titik asal O dipetakan ke dirinya sendiri dan suatu titik P dipetakan ke titik P', dimana O, P dan P' segaris dan $OP' = cOP$. Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat kartesius dinyatakan sebagai $x' = cx, y' = cy$.

Distribusi frekuensi Pengolahan data mentah dalam bentuk tabel menggunakan kelas dan frekuensi.

Frekuensi Jumlah data dalam suatu kelas tertentu.

Frekuensi harapan Banyaknya kejadian dikalikan dengan peluang kejadian itu.

Garis bagi sudut segitiga (*bisector angle*) Ruas garis bagi sudut segitiga adalah garis yang membagi sudut segitiga menjadi dua sudut yang kongruen (berukuran sama besar).

Garis berat (median) Ruas garis yang melalui titik sudut segitiga dan memotong sisi di depannya di titik tengahnya (midpoint).

Garis tinggi sisi segitiga (*Altitude*) Ruas garis tinggi sisi segitiga adalah garis yang melalui titik sudut segitiga dan memotong tegak lurus sisi didepannya.

Histogram Grafik yang menampilkan data menggunakan batang tegak berdampingan yang tingginya merepresentasikan frekuensi dari kelas yang bersangkutan.

Jangkauan Selisih nilai terbesar dan nilai terkecil.

Jarak antar titik Panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan titik-titik tersebut.

Jarak titik ke garis Misal P adalah titik dan g adalah garis. Jarak titik P ke garis g adalah panjang ruas garis penghubung antara titik P dengan proyeksi titik P pada garis g.

Jarak titik ke bidang Misal P adalah titik dan K adalah bidang. Jarak antara P dengan bidang-K adalah panjang ruas garis penghubung P dengan proyeksi P pada bidang-K.

Kejadian	Himpunan bagian dari ruang sampel
Kejadian majemuk	Dua atau lebih kejadian yang terjadi secara bersamaan
Kelas	Kelompok data berdasarkan kategori kuantitatif atau kualitatif.
Kombinasi	Susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan tidak memperhatikan urutannya.
Kongruen	(geometri) sama dalam ukuran. Dua ruas garis kongruen berarti dua ruas garis tersebut memiliki ukuran panjang yang sama.
Korespondensi satu-satu	Suatu pemetaan satu-satu diantara dua himpunan. Masing-masing anggota dari himpunan pertama dibuat pengaitan dengan tepat satu unsur pada himpunan kedua dan sebaliknya.
Kuartil	Membagi data yang telah diurutkan menjadi empat bagian yang sama banyak.
Mean	Rata-rata hitung.
Median	Nilai tengah setelah data diurutkan.
Modus	Nilai yang paling sering muncul.
Ogive	Grafik yang menampilkan frekuensi kumulatif kelas-kelas dalam suatu distribusi frekuensi.
Panjang kelas	Selisih batas bawah (atas) suatu kelas dengan batas bawah (atas) kelas sebelumnya.
Parameter	Ukuran atau karakteristik yang didapatkan menggunakan data keseluruhan dalam suatu populasi.
Peluang	Kemungkinan munculnya suatu kejadian.
Peluang saling bebas	Peluang dua atau lebih kejadian yang tidak saling mempengaruhi.
Peluang saling bersyarat	Peluang dua kejadian yang saling bergantung apabila terjadi atau tidak terjadinya kejadian A akan mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B.

Peluang saling lepas	Peluang dua atau lebih kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama.
Permutasi	Susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan memperhatikan urutannya.
Persentil	Membagi data yang telah diurutkan menjadi 100 bagian yang sama.
Poligon frekuensi	Grafik yang menampilkan data mengunakan garis yang menghubungkan titik-titik yang tingginya menandakan frekuensi dan digambarkan tepat di titik tengah kelas yang berkaitan.
Populasi	Keseluruhan objek penelitian.
Ragam	Rata-rata dari kuadrat jarak setiap nilai data dengan rata-ratanya.
Rata-rata (Rata-Rata Hitung)	Jumlah nilai data dibagi dengan banyaknya data.
Rasio	Hasil bagi (*quotient*) dari dua bilangan atau kuantitas. Rasio dari x ke y ditulis $x: y$.
Refleksi/Pencerminan	Misal l adalah garis pada bidang. Maka bayangan dari titik P adalah titik P' sedemikian hingga PP' adalah garis yang tegak lurus terhadap garis l dan l memotong garis PP' di titik tengah garis (midpoint).
Rotasi	Rotasi bangun datar dengan pusat titik asal O sebesar sudut α adalah suatu transformasi dari bangun datar dimana titik O di petakan ke dirinya sendiri, dan suatu titik P dengan koordinat sudut/polar (r, θ) (r, θ) dipetakan ke titik P' dengan koordinat sudut/polar $(r, \theta + \alpha)$.
Sampel	Sebagian dari objek penelitian yang dianggap mewakili keadaan populasi objek penelitian.
Sebangun	Dua segibanyak adalah sebangun jika ada korespondensi antara titik-titik sudutnya sehingga sudut-sudut yang bersesuaian kongruen dan rasio dari sisi-sisi yang bersesuaian sama besar.

Segibanyak Bangun datar yang dibatasi oleh garis lurus (ruas garis). Ruas garis yang membatasi bangun datar tersebut disebut sisi segibanyak.

Segibanyak kongruen Dua segibanyak kongruen jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik sudutnya sedemikian hingga semua sisi-sisi yang bersesuaian kongruen dan semua sudut-sudut yang bersesuaian kongruen.

Segiempat Segibanyak yang memiliki 4 sisi.

Segitiga Segibanyak yang memiliki 3 sisi.

Simpangan rata-rata (deviasi rata-rata) Nilai rata-rata dari selisih setiap data dengan nilai rataan hitung.

Simpangan rata-rata Penyimpangan nilai-nilai data terhadap rata-ratanya.

Simpangan baku Akar kuadrat dari ragam.

Sisi Salah satu ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut yang berdekatan pada segi banyak.

Statistika (1) Cabang dari matematika terapan yang mempunyai cara-cara mengumpulkan dan menyusun data, mengolah dan menganalisis data serta menyajikan data dalam bentuk kurva atau diagram, menarik kesimpulan, menafsirkan parameter dan menguji hipotesa yang didasarkan pada hasil pengolahan data. (2) Ukuran atau karakteristik yang didapatkan menggunakan data dari sampel.

Sudut (di antara dua garis/sinar) Gabungan dari dua sinar yang mempunyai persekutuan titik tetap.

Titik tengah ruas garis (*Midpoint*) Titik tengah ruas garis adalah titik yang membagi ruas garis menjadi dua ruas garis yang kongruen (panjangnya sama besar).

Titik Tengah (*midpoint*) (statistika) Angka yang terletak di tengah suatu kelas.

Transformasi Misal S adalah himpunan titik pada bidang. Suatu transformasi dari bangun datar adalah pemetaan satu-satu dari S ke S.

Translasi/Pergerseran	Transformasi bangun datar dimana suatu titik P dengan koordinat (x, y) dipetakan ke titik P' dengan koordinat (x', y'), dimana $x' = x + h, y' = y + k$.
Titik sampel	Setiap hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan.
Variansi	Kuadrat dari simpangan baku.

Daftar Pustaka

Bluman, Allan. 2009. *Elementary Statistics: a step by step approach*. Seventh edition. New York: McGraw-Hill.

BPS. 2015. *Statistik 70 tahun Indonesia Merdeka*. ISBN: 978-979-064-858-6.

Djarwanto. 1992. *Soal-Jawab Statistik (Bagian Statistik Induktif)*. Edisi Kedua. Yogyakarta: Penerbit Liberty.

Lewis, Harry. 1968. *Geometry, A Contemporary Course*. London: D, Van Nostrand Company, Inc.

Rosen, Kenneth H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications*. Seventh edition. New York: McGraw-Hill.

Serra, Michael. 2008. *Discovering Geometry: An Investigative Approach*. Emeryville: Key Curriculum Press.

Sun, Thomas Wong Hok. 2008. *Challenging Mathematics For 'O' Level.* Singapore: Redspot Publications PTE LTD.

Townsend, Michael. 1987. *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and graph Theory.* California: The Benjamin/Cummings.

Walpole, R.E dan Myers, R.H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Edisi Keempat. Penerjemah: Dr. RK. Sembiring. Bandung: Penerbit ITB.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fisher.html

http://tekno.tempo.co/read/news/2015/12/11/072727007/google-rata-rata-orang-indonesia-instal-31-aplikasi

Profil Penulis



Nama Lengkap : Dr. Abdur Rahman As'ari, M.Pd, M.A.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : abdur.rahman.fmipa@um.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
2. Wakil Presiden Indonesian Mathematics Societi (IndoMS)
3. Asisten Direktur I Lembaga Pendidikan Islam Sabilillah
4. Korprodi S2 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Pascasarjana S3 Teknologi Pembelajaran Universitas Negeri Malang (2007-2012)
2. S2: Pasca Sarjana S2 College of Education, The Ohio State University, USA (1994-1995)
3. S2: Pascasarjan S2 Pendidikan Matematika IKIP Malang (1984-1990)
4. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang (1979-1983)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Matematika SMP Kelas 7 (tahun 2014)
2. Buku Matematika SMP Kelas 8 (tahun 2014)
3. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. The Use of Graphic Organizer to Enhance Students' Ability Better Prepare Learner-Centered Mathematics Teaching and Learning: A Classroom Action Research (2012)
2. Critical Thinking Disposition of Prospective Mathematics Teachers in Indonesia (2014)

Nama Lengkap : Dahliatul Hasanah, S.Si, M. Math. Sc.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : dahliatul.hasanah.fmipa@um.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Matematika



- **Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:**
  1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang.

- **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**
  1. S2: Master of Mathematical Sciences, ANU College of Physical and Mathematics Sciences, The Australian National University (2011-2012)
  2. S1: Matematika, FMIPA Universitas Brawijaya (2003-2007)

- **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**
  1. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

- **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**
  1. Perancangan Multimedia Interaktif Matematika Bilingual Untuk Siswa SMP Rintisan Sekolah Bertaraf Internasional (2009)
  2. Penerapan Model PMKM Untuk Meningkatkan Kemampuan Metakognitif Mahasiswa Fisika pada Mata Kuliah Matematika I Fisika (2010)
  3. Pembelajaran Berdasar Masalah Untuk Meningkatkan Ketrampilan Berpikir dan Ketrampilan Pemecahan Masalah Mahasiswa Biologi Pada Mata Kuliah Matematika Biologi (2011)
  4. Identifikasi Kesalahan Konsep Matematika Mahasiswa Baru Angkatan 2013 Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UM (2012)

Nama Lengkap : Prof. Dr. Ipung Yuwono, M.S., M.Sc.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : ipungmat@.um.ac.id atau ipungum@yahoo.co.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika



Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
2. Asesor BAN-PT
3. Anggota Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP)
4. Ketua Tim Juri Kontes Literasi Matematika PISA (Program for International Students Assessment)
5. Ketua Penyusun soal Matematika pada SNM PTN/SBM PTN
6. Anggota Tim Monitoring dan Evaluasi Implementasi Kurikulum 2013 SMA
7. Dosen Program Pascasarjana Prodi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3:Program Pascasarjana Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya (1999-2006))
2. S2: Mathematics Education, University of Twente, Belanda (1998-1999)
3. S2: Pascasarjana Matematika ITB Bandung (1987-1990)
4. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang (1977-1981)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pendidikan Matematika II (2007)
2. Model-model Pembelajaran Inovatif (2008)
3. Workshop Penelitian Pendidikan Matematika (2011)
4. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Model Pembelajaran Matematika yang Sejalan dengan Kurikulum Berbasis Kompetensi (2008)
2. Pengembangan model pembelajaran matematika SMP berbasis Standar Proses Pendidikan (2009)
3. Pengembangan bahan ajar (teaching material) matematika SMP berbasis Standar Proses Pendidikan (2010)
4. Pengembangan model pembelajaran matematika SMP mengacu Kurikulum 2013 (2013)

Nama Lengkap : Latifah Mustofa Lestyanto, S.Si, M.Pd.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : latifah.mustofa.fmipa@um.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jln. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika



Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

2. S2: Pasca Sarjana Pendidikan Matematika - Universitas Sebelas Maret, Surakarta (2009-2010)
3. S1: Jurusan Matematika Universitas Sebelas Maret (2003-2007)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pemetaan Payung Penelitian Pendidikan Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang (2013)
2. Penerapan Lesson Study Untuk Meningkatkan Keterampilan Guru Matematika SMP Dalam Penyusunan Perangkat Pembelajaran Berdasarkan Kurikulum 2013 (2015)

Nama Lengkap : Lathiful Anwar, S.Si, M.Sc.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : lathiful.anwar.fmipa@um.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jln. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika



Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: International Master Program on Mathematics Education (IMPoME) di Universitas Negeri Surabaya dan Utrecht University, Belanda (2009-2011)
2. S1: Matematika, FMIPA Universitas Negeri Malang (1999-2003)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Proses Berpikir Siswa Kelas 2 Sekolah Dasar dalam Membangun Strategi Mental Aritmatika untuk Menjumlahkan Bilangan sampai 500 Menggunakan Model Garis Bilangan (2011)
2. Identifikasi Nilai-nilai Karakter Bangsa yang dapat diintegrasikan melalui pembelajaran Matematik di SMP (2012)
3. Pengembangan Model Pembelajaran matematika Kontekstual (2013)
4. Identifikasi Kesalahan Konsep Mahasiswa Baru tahun 2013 Prodi Pendidikan Matematika (2013)
5. Analisis Prestasi Belajar Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang (2014)
6. Pengembangan Media Pembelajaran Untuk Mendukung Kemampuan Penalaran Spasial Siswa (2015)

Nama Lengkap : Dr. Makbul Muksar, S.Pd, M.Si.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : makbul.muksar.fmipa@um.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Matematika



Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
2. Supervisor Sekolah Model Terpadu Bojonegoro
3. Manajer Sekolah Model Terpadu Bojonegoro
4. Ketua Jurusan Matematika FMIPA UM
5. Kepala Pusat Pengembangan Pendidikan Profesi Guru LP3 UM

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Matematika, ITB Bandung (2000-2005)
2. S2: Matematika, ITB bandung (1994-1996)
3. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang (1986-1991)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Analisis Real (2011)
2. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Peningkatan Kemampuan Bahasa Inggris dan Hasil Belajar Matematika Dasar I Mahasiswa Bilingual Melalui Penerapan Metode Analisis Kesalahan Newman (2009)
2. Peningkatan Kemampuan Menyelesaikan Soal Cerita Matematika Siswa Kelas IV SDN Kebonsari I Malang Melalui Penerapan Metode Analisis Kesalahan Newman (2010)
3. Studi Penggunaan Metode Level Set Dalam Menyelesaikan Masalah Stefan (2013)
4. Identifikasi Kesalahan Konsep Matematika Mahasiswa Baru angkatan 2013 Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UM (2013)
5. Pengembangan Model Perangkat Pembelajaran Berbasis Kearifan Lokal Bermuatan Gender sebagai Upaya Strategis Pengarustamaan Gender bidang Pendidikan (2014)
6. Pemetaan Prestasi Mahasiswa Berdasarkan Jalur Masuk Jurusan Matematika FMIPA UM (2014)

Nama Lengkap : Nur Atikah, S.Si, M.Si.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : nur.atikah.fmipa@um.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Matematika



Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam – Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2007-2010)
2. S1: Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam – Universitas Negeri Malang (2000-2005)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pemetaan Payung Penelitian Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang (2013)
2. Analisis Multidimensional Scaling untuk Melihat Pemetaan Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang (2015)

Nama Lengkap : Syaiful Hamzah Nasution, S.Si, S.Pd, M.Pd.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : syaiful.hamzah.fmipa@um.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika



Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Pendidikan Matematika di Program Pascasarjana Universitas Negeri Malang (2010-2012)
2. S1: program gelar ganda S1 Matematika dan S1 Pendidikan Matematika di Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Malang (2003-2009)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Model Pembelajaran Non Konvensional Berbasis TIK Untuk Matakuliah Matematika Dasar II (2013)
2. Pengembangan WEB Jurusan Matematika (2013)
3. Pengembangan Media Pembelajaran untuk Mendukung Kemampuan Penalaran Spasial Siswa (2015)

Nama Lengkap : Drs. Tjang Daniel Chandra, M.Si, Ph.D.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : tjang.daniel.fmipa@um.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jln. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Matematika



Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:
1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:
1. S3: Matematika, Universitas Teknologi Eindhoven, Belanda (1998-2002)
2. S2: Matematika ITB (1992-1994)
3. S1: pendidikan matematika di IKIP Malang (1984-1990)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):
1. Geometri (2012)
2. Pemodelan Matematika (2014)
3. Buku matematika SMA Kelas 12 (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):
1. Analisa kesalahan-kesalahan mahasiswa dalam mengerjakan soal-soal latihan dan tes Kalkulus Lanjut (2012)
2. Pemetaan Payung Penelitian Matematika di Jurusan Matematika FMIPA UM (2013)
3. Pengembangan Buku Elektronik Olimpiade Matematika Berbasis Web dengan Pendekatan Strategi Pemecahan Masalah (2014)

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Dr. Agung Lukito, M.S.
Telp. Kantor/HP : +62318293484
E-mail : gung_lukito@yahoo.co.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Kampus Unesa Ketintang
Jalan Ketintang Surabaya 60231.
Bidang Keahlian: Matematika dan Pendidikan Matematika.

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. 2010 – 2016: Dosen pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Faculty of Mathematics and Informatics/Delft University of Technology (1996 – 2000)
2. S2: Fakultas Pascasarjana/Matematika/ITB Bandung (1988 – 1991)
3. S1: Fakultas PMIPA/Pendidikan Matematika/Pendidikan Matematika/ IKIP Surabaya (1981 – 1987)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks Matematika kelas 7 dan 10 (2013)
2. Buku Teks Matematika kelas 7,8 dan 10, 11 (2014)
3. Buku Teks Matematika kelas 7,8, 9 dan 10, 11, 12 (2015)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Perangkat Pendampingan Guru Matematika SD dalam Implementasi Kurikulum 2013 (2014)
2. Peluang Kerjasama Unit Pendidikan Matematika Realistik Indonesia dengan Pemangku Kepentingan, LPPM Unesa (2013)
3. Pemanfaatan Internet untuk Pengembangan Profesi Guru-guru Matematika SMP RSBI/SBI Jawa Timur, 2010, (Stranas 2010)
4. Relevansi Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) dengan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP), 2009, (Stranas 2009)

Nama Lengkap : Drs. Turmudi, M.Sc., Ph.D.
Telp. Kantor/HP : (0264)200395/081320140361
E-mail : turmudi@upi.edu.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl. Veteran 8 Purwakarta/Jl. Dr. Setiabudi
229 Bandung,
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika.

■ **Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:**

4. Dosen Pendidikan Matematika di S1, S2, dan S3 Universitas Pendidikan Indonesia.
5. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika 2007-2015
6. Ketua Prodi S2 dan S3 Pendidikan Matematika SPs UPI, 2012-2015 (dalam konteks terintegrasi dengan S1 Pendidikan Matematika FPMIPA UPI)
7. Direktur Kampus Daerah UPI Purwakarta, 2015- Sekarang

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**

1. S3: Mathematics Education, Graduate School of Education, Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
2. S2: Educational and Training System Designs, Twente University Enschede, Th
3. S2: Mathematics Education (Graduate School of Education), Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
4. S1: Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1984-1986).

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. Math Project untuk SMP/MTs Kelas VII, Yrama Widya, (2014).

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. Pengembangan Pembelajaran Matematika Berbasis Fenomena Dikdaktis di Pendidikan Dasar.

Nama Lengkap : Dr. Yansen Marpaung
Telp. Kantor/HP : 0274-883037 / 085878129726
E-mail : yanmar@dosen.usd.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Universitas Sanata Dharma, Prodi Pendidikan Matematika, Paingan, Maguwoharjo, Sleman, Yogyakarta.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika, Psikologi Kognitif, Salah satu pemrakarsa PMRI, sampai sekarang aktif mengembangkan PMRI dan mencobakannya di sekolah

■ **Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:**

2. 2006-2016: Dosen Pendidikan Matematika di S1 Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma
3. 2015-2016 :Dosen Pendidikan Matematika di S2 Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma
4. 2006-2012: Dosen Honorer di S2 Pendidikan Matematika, UNS, Solo
5. 2006-2012: Dosen Honorer di S3 Pendidikan Matematika UNESA, Surabaya
6. 2006-2016:Melatih guru-guru dalam rangka PMRI (Penddikan Matematika Realistik Indonesia).

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**

1. S3 :1982-1986;Pendidikan Matematika (Didkatik der Mathematik) di Universitaet Osnabrueck, Deutchland (Jerman). Lulus Maret 1986.
2. S2. Tidak melalui S2.
3. S1: Jurusan Pasti Alam FKIP, Universitas Sanata Dharma: 1968-1970

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. Buku-buku Matematika SMP dan SMA dalam rangka KTSP terbitan Puskur.
2. Buku Matematika SMP, kurikulum 2013 awal yang disusun oleh kelompok di Medan

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

Tidak ada

Nama Lengkap : Prof. Dr. St. Suwarsono.
Telp. Kantor/HP : 0274-883037 / 085878129726
E-mail : stsuwarsono@gmail.com.
Akun Facebook : Stephanus Suwarsono
Alamat Kantor : Jalan Affandi, Mrican, Teromolpos 29, Yogyakarta 55002.
Bidang Keahlian: Matematika dan Pendidikan Matematika.

■ **Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:**

3. Dosen tetap dengan jabatan akademik guru besar di Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (JPMIPA), Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**

1. S2: Monash University (di Melbourne, Australia) Fakultas: Education Jurusan (Bidang): Mathematics Education: 1982.
2. S1: Jurusan Pasti Alam FKIP, Universitas Sanata Dharma: 1974.

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. -

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

Tidak ada

Nama Lengkap : Dr. Sugito Adi Warsito, M.Pd.
Telp. Kantor/HP : 085217181081
E-mail : sugito72@yahoo.com.
Akun Facebook : sugitoadi@facebook.com
Alamat Kantor : Jl. Raya Parung-Bogor No. 420 Lebakwangi Parung Bogor, Jawa Barat.
Bidang Keahlian: Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan.

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Staf pada Bidang Program di PPPPTK Penjas dan BK Kemdikbud, Parung Bogor, Tahun 2002 – 2004.
2. Instruktur Pelatihan Guru Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan di PPPPTK Penjas dan BK Kemdikbud, Parung Bogor, Tahun 2004 – 2009.
3. Widyaiswara pada PPPPTK Penjas dan BK Kemdikbud, Parung Bogor Tahun 2010 – sekarang.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

4. S3: Program Studi Pendidikan Olahraga, Universitas Negeri Jakarta (2009 – 2013)
5. S2: Program Studi Pendidikan Olahraga, Universitas Negeri Jakarta (2006 – 2009)
6. S1: Jurusan Pendidikan Olahraga, Fakultas Pendidikan Olahraga, Universitas Negeri Jakarta (1992 – 1998)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks dan Buku Guru Mata Pelajaran Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan Sekolah Menengah Pertama Kelas IX, Tahun 2015.
2. Buku Teks dan Buku Guru Mata Pelajaran Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan Sekolah Menengah Atas Kelas XI, Tahun 2015.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Penguasaan Konsep Kepenjasan dan Profesionalisme Guru Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan, Tahun 2013.

Nama Lengkap : Dr. Ali Mahmudi.
Telp. Kantor/HP : 081328728725
E-mail : ali_uny73@yahoo.com.
Akun Facebook : https://www.facebook.com/ali.mahmudi.90
Alamat Kantor : Kampus FMIPA UNY Kampus Karangmalang Yogyakarta.
Bidang Keahlian: Pedidikan Matematika.

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. 1999 - sekarang bekerja sebagai dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pendidikan Matematika/Sekolah Pascarjana Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) Bandung (2007 – 2010)
2. S2: Program Studi Pendidikan Matematika/Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya (UNESA) (1997 – 2003)
3. S1: Prodi Pendidikan Matematika/Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA/ Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) (1992 – 2997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku teks dan non-teks pelajaran matematika sekolah yang dikoordinasikan oleh Pusat Kurikulum dan Perbukuan (Puskurbuk) Kementrian dan Kebudayaan RI sejak 2005.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan interakctive student's book berbasis ICT untuk mendukung aktivitas eksplorasi konsep-konsep geometri.
2. Pengembangan bahan ajar matematika dengan pendekatan kontekstual untuk pembelajaran matematika di SMK.

Profil Editor

Nama Lengkap : Ir. Suah Sembiring
Telp. Kantor/HP : 08121020807
E-mail : quantumkalideres@yahoo.co.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl. Peta Selatan 6Y, Kalideres, Jakarta Barat
Bidang Keahlian: Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. 2002-sekarang: Direktur Bimbingan Belajar Quantum.
2. 1995-2002: Direktur Ganesha Operation Wilayah Jabotabek.
3. 1985-1995: Pengajar Matematika di Bimbingan Belajar KSM Jakarta.
4. 1985-1986: Dosen Metode Numerik dan Teknik Simulasi di STMIK BINUS Jakarta.
5. 1982-1985: Guru Matematika di SMP/SMA St. Aloysius Bandung.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Matematika Institut Teknologi Bandung (ITB) (1979-1984)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SMA-MA/SMK-MAK Kelas X dan XII, Puskurbuk (2015).

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

Tidak ada.